

تمرين رقم 1 : (8 نقط ونصف)

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2 + 3}{2(v_n + 1)} \end{cases}$$

(1) أحسب v_1 و v_2 .

(2) أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n > 1$

ب- أدرس رتبة (v_n) .

ج- استنتج أن (v_n) متقاربة .

(3) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2(x + 1)}$$

أ- بين أن f متصلة على المجال $]1, +\infty[$.

ب- بين أن : $f(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$

(4) حدد نهاية (v_n) .

(5) ليكن g قصور f على المجال $]-1, 1[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين رقم 2 : (3 نقط)

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a, b]$. ليكن

p و q عددين حقيقيين موجبين قطعاً . بين أن :

$$\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \frac{pf(a) + qf(b)}{p + q}$$

تمرين رقم 3 : (4 نقط ونصف)

(1) ليكن α عدداً حقيقياً بحيث $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{بين أن : } \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(يمكن استعمال العلاقتين التاليتين :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha ; \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \right)$$

(2) نضع $\alpha = \text{Arc tan } x$.

$$\text{أ- بين أن : } \sqrt{1 + x^2} - x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{ب- استنتج أن : } \text{Arc tan}(\sqrt{1 + x^2} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

(3) بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \text{Arc tan } x + 2\text{Arc tan}(\sqrt{1 + x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$$

تمرين رقم 4 : (4 نقط)

(1) حل في المجموعة $I =]2, +\infty[$ المعادلة :

$$3 - \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

(2) لتكن الدالة العددية f المعرفة على I بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2}{3 - \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}$$

أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي :

$$D_f =]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

ب- بين أنه يمكن تمديد الدالة f بالاتصال في النقطة

$$x_0 = 3$$