# حلول

## تمرين 1

1- مضاعفات العدد14 الأصغر من 200 هي 0 ، 14 ، 28 ، 42 ، 56 ، 70 ، 84 ، 98 ، 112 ، 126 ، 140 ، 154 ، 168 ، 182 ، 196.

2- قواسم العدد1470 هي 1 ، 2 ، 3 ، 5 ،6 ، 7 ، 10 ، 14 ، 15 ، 21 ، 30 ، 35 ، 42 ، 49 ، 70 ، 98 ، 105 ، 147 ، 210 ، 245 ، 294 ، 490 ، 735 ، 1470.

3- أ- المضاعفات المشتركة للعددين $a=37$ و $b=79$ هي مضاعفات العدد $37\times 79$

ب- $a=65=5\times 13$ و $b=42=2\times 3\times 7$

المضاعفات المشتركة للعددين 65 و 42 هي مضاعفات $65\times 42$

ج- $a=70=2\times 5\times 7$ و $b=14=2\times 7$ هي مضاعفات $5\times 14$

د- $a=46=2\times 23$ و $b=76=2^2\times 19$ هي مضعفات العدد $2^2\times 19\times 23$

4- أ- $a=54=2\times 3^2$ و $b=42=2\times 3\times 7$

القواسم المشتركة للعددين 54 و 42 هي 1 ، 2 ، 3 ، 6

ب- $a=336=2^4\times 3\times 7$ و $b=80=2^4\times 5$

القواسم المشتركة للعددين 336 و 80 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16

ج- $a=72=2^3\times 3^2$ و $b=35=5\times 7$

القاسم المشترك الوحيد للعددين72 و 35 هو 1

د- $a=83$ و $b=67$ عددان أوليان

القاسم المشترك الوحيد للعددين83 و 67 هو 1

## تمرين 2

1- 49 عدد غير أولي لانه يقبل القسمة على 7

لدينا الاعداد الاولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13، 17 لا تقسم العدد 239 و $17^2 \prec 239 \prec 23^2$

إذن العدد 239 أولي

..........................................................................

..........................................................................

2- التفكيك إلى جداء عوامل أولية

$675=3^3\times 5^2$ ، $1650=2\times 3\times 5^2\times 11$ ، $5292=2^2\times 3^2\times 7^2$ ، $6250=2\times 5^5$

## تمرين 3

1- أ- $a=27=3^3$ و $b=42=2\times 3\times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ هو $2\times 3^3\times 7=378$

ب- $a=19$ و $b=37$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ هو $19\times 37=676$

ج- $a=72=2^3\times 9^2$ و $b=35=5\times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ هو $35\times 72=2520$

2- أ- $a=81=3^4$ و $b=126=2\times 3^2\times 7$

القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ هو $3^2=9$

ب- $a=19$ و $b=37$

القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ هو 1

ج- $a=72=2^3\times 3^2$ و $b=35=7\times 5$

القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ هو 1

## تمرين 4

نحدد الأرقام a, b, c

-1 العدد 23a4 يقبل القسمة على 3 يعني أن $0 \leq a \leq 9$ و $a+9$ يقبل القسمة على3

ومنه $a=0$ أو $a=3$ أو $a=6$ أو $a=9$

-2 العدد 23a4 يقبل القسمة على 3 و لا يقبل القسمة على 9 يعني أن $0 \leq a \leq 9$ و $a+9$ يقبل القسمة على3 و لا يقبل القسمة على 9 ومنه $a=3$ أو $a=6$

-3 العدد 23b5c يقبل القسمة على 3 و على 5 يعني $0 \leq b \leq 9$ و $c \in \{0;5\}$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3

- إذا كان $c=0$ فان

$0 \leq b \leq 9$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3 تعني $b=2$ أو $b=5$ أو $b=8$

- إذا كان $c=5$ فان

$0 \leq b \leq 9$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3 تعني $b=0$ أو $b=3$ أو $b=6$ أو $b=9$

## تمرين5

ليكن $n$ و $m$ عددين صحيحين طبيعيين حيث $PGCD(m;n)=24$ و $n \leq m$

-1 $PGCD(m;n)=24=2^3 \times 3$

العوامل الأولية المشتركة للعددين $n$ و $m$ هي 2 و 3

-2 لدينا $m.n=3456$

$m.n=PGCD(m;n) \times PPCM(m;n)$ و $PGCD(m;n)=24$

ومنه $PPCM(m;n)=\dfrac{3456}{24}=144=2^4 \times 3^2$

وحيث أن $n \leq m$ فان

$(m=2^3 \times 3 \times 3=72$ و $n=2^3 \times 3 \times 2=48)$ أو $(m=2^3 \times 3 \times 3 \times 2=144$ و $n=2^3 \times 3=24)$

## تمرين 6

$a=2^3 \times 3^2 \times 7$

-1 نتأكد أن العدد $a$ يقبل 24 قاسم

$a=2^3 \times 3^2 \times 7=24 \times (3 \times 7)$ إذن العدد $a$ يقبل 24 قاسم

-2 نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي $k$ حيث $ka$ مربع كامل (أي مربع عدد صحيح طبيعي)

لدينا $a=2^3 \times 3^2 \times 7$ ومنه $2 \times 7 \times a=2^4 \times 3^2 \times 7^2=(2^2 \times 3 \times 7)^2$ و منه $k=14$

-3 نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي $m$ حيث $ma$ مكعب لعدد صحيح طبيعي

لدينا $a=2^3 \times 3^2 \times 7$ ومنه $3 \times 7^2 \times a=2^3 \times 3^3 \times 7^3=(2 \times 3 \times 7)^3$ و منه $k=147$

## تمرين 7

-1 نبين أن مجموع خمسة أعداد صحيحة طبيعية هو عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على5

ليكن $a$ عدد صحيح طبيعي

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=5a+10=5(a+2)$$

وحيث أن $(a+2) \in \mathbb{N}$ فان $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)$ يقبل القسمة على5

2- ليكن $a$ عدد صحيح طبيعي
نبين أن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3)+1 &= (a^2+a)(a^2+5a+6)+1 \\ &= a^4+6a^3+11a^2+6a+1 \\ &= a^4+6a^3+2a^2+9a^2+6a+1 \\ &= a^4+2a^2(3a+1)+(3a+1)^2 \\ &= (a^2+3a+1)^2 \end{aligned}$$

إذن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

## تمرين 8

1- ننشر $(n+1)^2-n^2$

$$(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$$

2- نستنتج أن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين.
لدينا $(n+1)^2-n^2=2n+1$ مهما كانت $n$ من $\mathbb{N}$
إذن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين
3- طبق الاستنتاج السابق على الأعداد 17 ، 45 ، 101

$$101 = 2\times 50+1 = 51^2-50^2 \quad ; \quad 45 = 2\times 22+1 = 23^2-22^2 \quad ; \quad 17 = 2\times 8+1 = 9^2-8^2$$

## تمرين 9

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا
ندرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2+4n+1$ و $3n^2+n$
1- * $n$ و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي
و التالي جداؤهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي
* لدينا $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$ و التالي زوجية $n+(n+1)+(n+2)$ هي زوجية $n+1$
إذا كان $n$ زوجيا فان $n+(n+1)+(n+2)$ فرديا
إذا كان $n$ فرديا فان $n+(n+1)+(n+2)$ زوجيا
* لدينا $4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ و حيث أن $(2n^2+2n)\in\mathbb{N}$ فان $4n^2+4n+1$ زوجي
* لدينا $3n^2+n=n(n+3)$
$n$ و $n+3$ ليس لهما نفس الزوجية أي احدهما فردي و الآخر زوجي ومنه $n(n+3)$ عدد زوجي
اذن $3n^2+n$ زوجي

## تمرين 10

ليكن $n$ و $m$ عددين صحيحين طبيعيين حيث $m \succ n$
1- نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية
العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا
* إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد $k$ من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة
نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي
* إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد $k$ من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة
نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا
إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

2- نحل المعادلة $m^2-n^2=196$

$m^2-n^2=196$ تكافئ $(m-n)(m+n)=2^2\times 7^2$

و حيث 196 زوجي فان $m+n$ و $m-n$ زوجيان

ومنه $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=98 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m-n=14 \\ m+n=14 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} m=50 \\ n=48 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m=14 \\ n=0 \end{cases}$

## تمرين 11

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1- تأكد $n^2-1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$ ; $n=3$ ; $n=5$ ; $n=7$

...............................

2- بين أن $n^2-1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي $n$

ليكن $n$ عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد $k$ من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$

لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد $k'$ من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1)=2k'$ و بالتالي $n^2-1=8k'$

إذن $n^2-1$ مضاعف للعدد8

## تمرين 12

ليكن $n$ و $m$ و $k$ أعداد صحيحة طبيعية

نبين أنه إذا كان $3n+2m$ و $7n+5m$ مضاعفين للعدد $k$ فان $n$ و $m$ مضاعفين للعدد $k$.

$3n+2m$ و $7n+5m$ مضاعفين للعدد $k$ ومنه يوجد عددين صحيحين طبيعيين $a$ و $b$ حيث

$3n+2m=ak$ و $7n+5m=bk$ ومنه $\begin{matrix} 7\times \\ 3\times \end{matrix}\begin{cases} 3n+2m=ak \\ 7n+5m=bk \end{cases}$ و $\begin{matrix} 5\times \\ 2\times \end{matrix}\begin{cases} 3n+2m=ak \\ 7n+5m=bk \end{cases}$

أي $\begin{cases} 21n+14m=7ak \\ 21n+15m=3bk \end{cases}$ و

ومنه $(21n+15m)-(21n+14m)=3bk-7ak$ و $(15n+10m)-(14n+10m)=5ak-2bk$

و بالتالي $m=(3b-7a)k$ و $n=(5a-2b)k$

إذن $n$ و $m$ مضاعفين للعدد $k$.

## تمرين 13

1- ننشر $\left(10^6-1\right)^3$

$$\left(10^6-1\right)^3=10^{18}-3\times 10^{12}+3\times 10^6-1$$

2 – نستنتج باقي القسمة للعدد $999999^3$ على 5

$$\begin{aligned} 999999^3=\left(10^6-1\right)^3 &= 10^{18}-3\times 10^{12}+3\times 10^6-1 \\ &=10^{18}-3\times 10^{12}+3\times 10^6-5+4 \\ &=5\left(2\times 10^{17}-3\times 5\times 10^{11}+3\times 2\times 10^5-1\right)+4 \end{aligned}$$

وحيث أن $\left(2\times 10^{17}-3\times 5\times 10^{11}+3\times 2\times 10^5-1\right)\in\mathbb{N}$ فان باقي القسمة للعدد $999999^3$ على 5 هو 4

## تمرين 14

1- نحل المعادلة $(x+1)(y+6)=35$ $\qquad (x;y)\in\mathbb{N}^2$

ليكن $(x;y)\in\mathbb{N}^2$

$(x+1)(y+6)=35$ ومنه $x+1$ و $y+6$ يقسمان العدد 35 و $1\le x+1\le 35$ $6\le y+6\le 35$

أي $x+1$ و $y+6$ يقسمان العدد 35 و $0\le x\le 34$ و $0\le y\le 29$

و حيث أن قواسم 35 هم 1 و 5 و 7 و 35 فان

$\begin{cases} x+1=1 \\ y+6=35 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+1=5 \\ y+6=7 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x=0 \\ y=29 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

2- نحدد $x$ و $y$ من $\mathbb{N}$ حيث $x+y=504$ و $PGCD(x;y)=24$

لدينا $PGCD(x;y)=24$ و منه يوجد عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين $a$ و $b$ حيث $x=24a$ و $y=24b$

و حيث أن $x+y=504$ فان $24a+24b=504$

و منه $a+b=21$

و بالتالي $\begin{cases} a=1 \\ b=20 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=2 \\ b=19 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=3 \\ b=18 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=4 \\ b=17 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=5 \\ b=16 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=6 \\ b=15 \end{cases}$

$\begin{cases} a=7 \\ b=14 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=8 \\ b=13 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=9 \\ b=12 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a=10 \\ b=11 \end{cases}$ و نحصل على نتائج الأخرى بإعطاء قيم

للعدد $a$ $b$ و العكس لان $a$ و $b$ يلعبان دوران متماثلان .

و بالتعويض في $x=24a$ و $y=24b$ نحصل على نتائج..............

3- نحدد الأرقام $x$ و $y$ بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على28

العدد $11x1y$ قابل للقسمة على28 ومنه $11x1y$ قابل للقسمة على4 و 7

ومنه $1y$ قابل للقسمة على 4 و بالتالي $y=2$ أو $y=6$

* إذا كان $y=2$ فان $11x12=11012+x\times10^2 = 7\times1573+1+x\times10^2$

وحيث $11x12$ قابل للقسمة على 7 فان $x\times10^2+1=\overline{x01}$ يقبل القسمة على 7

ومنه $x=3$

* إذا كان $y=6$ فان $11x62=11016+x\times10^2 = 7\times1573+5+x\times10^2$

وحيث $11x16$ قابل للقسمة على 7 فان $x\times10^2+5=\overline{x05}$ يقبل القسمة على 7

ومنه $x=8$ أو $x=3$

إذن $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

## تمرين 15

ليكن $n$ و $k$ من $\mathbb{N}$

1- نتأكد إذا كانت $n=5k+1$ أو $n=5k+3$ فان $n^2-1$ يقبل القسمة على 5

اذا كان $n=5k+1$ فان $n^2-1=25k^2+10k=5\left(5k^2+2k\right)$

ومنه $n^2-1$ يقبل القسمة على 5

اذا كان $n=5k+3$ بنفس الطريقة نحصل على أن $n^2-1$ يقبل القسمة على 5

نتأكد إذا كانت $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 4$ فان $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 5
بنفس الطريقة.....................................

2- نبين أنه مهما كان $n$ من $\mathbb{N}$ فان العدد $n\left(n^4 - 1\right)$ يقبل القسمة على 5

* إذا كانت $n$ لا تقبل القسمة 5 فان $n = 5k + 1$ أو $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 3$ أو $n = 5k + 4$
ومنه $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 5 أو $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 5
و بالتالي $n^4 - 1 = \left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n\left(n^4 - 1\right)$ يقبل القسمة على 5

* إذا كانت $n$ تقبل القسمة 5 $n\left(n^4 - 1\right)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n\left(n^4 - 1\right)$ يقبل القسمة على 5 مهما كانت $n$ من $\mathbb{N}$