

تمرين 1

أدرس f و أنشئ منحناها في الحالات التالية

$$\text{أ- } f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} \quad \text{ب- } f(x) = 2x + \arccos \frac{1}{x}$$

$$\text{د- } \begin{cases} f(x) = (2-x)^{\frac{3}{2}} & x < 2 \\ f(x) = -\arctan \sqrt{x-2} & x \geq 2 \end{cases}$$

تمرين 2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2-x} & x \in [0;1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\end{cases}$$

لتكن f دالة عددية معرفة بـ1- أدرس اتصال f في 0 و 1 وحدد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$ 2- ادرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و 1 و أول النتيجة هندسيا.3- أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ و ادرس إشارتها و أعط جدول تغيرات f .4- أدرس الفروع اللانهائية ل C_f ثم أنشئ C_f $\|i\| = \|j\| = 2cm$

تمرين 3

$$\begin{cases} f(x) = x - 2\arctan(x) & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

لتكن f دالة عددية معرفة بـ1- احسب نهاية f عند $-\infty$, $+\infty$ 2- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس ل C_f عند النقطة ذات الافصول 0.3- احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* ثم ادرس تغيرات f .4- ادرس الفروع اللانهائية ل C_f ثم أنشئ C_f 5- ليكن g قصور ل f على $I =]-\infty; 0[$ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 4

$$\text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[\text{ بـ } f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

1- أ- حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و أول النتائج هندسيا .ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ و أعط جدول تغيرات f 2- أ- بين أن $f''(x) = (2x+1)^{-\frac{5}{2}}(1-x)$ $\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ ب- بين أن النقطة A ذات الافصول 1 نقطة انعطاف ل (C_f) 4- أنشئ (C_f) $\|i\| = \|j\| = 2cm$ 5- ليكن g تقابل من $]0; +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أ- تحقق من أن $\forall x \in D - \{-1\} \quad \frac{f(x)}{x+1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في -1 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

3- بين أن $\forall x \in D - \{-1\} \quad f'(x) = \frac{-3}{2x^3 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$ و أعط جدول تغيرات الدالة f

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

5- أ- لتكن g قصور الدالة f على $]-\infty; -1[$ نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

1- أحسب $f(1)$ وحدد D_f

2- أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في -2 ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 1 ثم أول النتيجة هندسيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-2; 1[\cup]1; +\infty[$ و أعط جدول تغيرات f

4- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

تمرين 7

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} & x > 0 \\ f(x) = -\frac{x}{2} + \arctan x & x \leq 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة بـ

1- أ- حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- تأكد أن f متصلة في 0 .

2- أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم اليسار في 0 و أول النتيجتين هندسيا.

3- أ- بين أن f تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$.

ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $]-\infty; 0[$.

ج- أعط جدول التغيرات f .

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

أ- لتكن g قصور الدالة f على $]0; +\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 8

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x & x < 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

1- أحسب $f(-1)$; $f(3\sqrt{3})$; $f(8)$

- 2- أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 و يسار 0 ثم أول النتيجة هندسيا.
3- بين أن

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$$

- 4- حدد جدول تغيرات f
5- أ- أدرس الفروع اللانهائية
ب- أنشئ منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم.م.م.
6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1; +\infty[$
أ- بين أن g تقابل من $]1; +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده
ب- أنشئ منحنى الدالة g^{-1}

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي

$$f(x) = \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x} - 1)$$

- 1- أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا
2- احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}_+^* و أعط جدول تغيرات f
3- أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f
ب- بين أن $A(1; 0)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f ثم أعط معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.
ج- أنشئ في معلم.م.م المنحنى C_f $\|\vec{i}\| = 4cm$

4- ليكن g قصور الدالة f على $I = \left[\frac{1}{8}; +\infty \right[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده و حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم أنشئ $C_{g^{-1}}$

تمرين 10

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)} & x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[\\ f(x) = x - \sqrt{2x} & x \in]0; 2[\end{cases}$$

- 1- احسب $f(4)$; $f(-2)$
2- تأكد أن f متصلة في 0 و 2
3- أدرس اشتقاق f على اليمين و اليسار في كل من النقطتين 0 و 2 . و أول النتائج هندسيا .

$$4- \text{ أ- بين أن } \forall x \in]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[\quad f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)} \right)^2} \right)$$

$$\forall x \in]0; 2[\quad f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

- ب- أعط جدول تغيرات f
1- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f
2- ليكن g قصور الدالة f على $I = [2; +\infty[$
أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 11

I- لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$

1- أعط جدول تغيرات الدالة h على \mathbb{R}^+

2- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad h(x) \leq 0$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي $f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$

1- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

3- ليكن g قصور الدالة f على $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$

4- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

(نقبل أن لـ C_f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$).

تمرين 12

نعتبر f دالة عددية معرفة على \mathbb{R}^+ بـ $f(x) = 1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x} - 2)^2$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

2- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3- أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

ب- بين أن لـ C_f نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتها.

4- ليكن g قصور الدالة f على $I = [4; +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{64}{9}; \frac{121}{16}\right[$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J . ثم استنتج أن $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

د- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

تمرين 13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $f(x) = 2 \arctan \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1- أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t}$

ت- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و أول النتيجة هندسيا

- 2- أدرس التغيرات الدالة f
 3- أنشئ المنحنى C_f
 4- نعتبر الدالة g قصور f على $I = [1; +\infty[$
 أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده
 ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J
 5- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1; 2]$

6- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- أ- أثبت أن $f(2) > \frac{\pi}{3}$
 ب- بين أنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 2$
 ت- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية، بين أنه لكل n من \mathbb{N} :
 $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$
 د- استنتج أن $\lim u_n = \alpha$

تمرين 14

- I- 1) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$
 2) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$
 أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad |h'(x)| \leq x^4$
 ب- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad |h(x) - h(0)| \leq x^5$
 ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = 0$

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

- 1- أدرس تغيرات g (النهايات ، $g'(x)$ ، جدول التغيرات)
 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا غير منعدم α ينتمي إلى $] -1; \frac{-1}{2}[$
 3- استنتج إشارة $g(x)$ على $] -1; +\infty[$

III- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x} & x \in] -1; 0[\cup] 1; +\infty[\\ f(0) = 0 \quad ; \quad f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

- 1- بين أن f متصلة على $] -1; +\infty[$
 2- أحسب $f'(x)$ لكل x من $] -1; 0[\cup] 1; +\infty[$ و استنتج تغيرات الدالة f
 3- أ- باستعمال السؤال (I - 2 - ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2}$ ثم أول النتيجة هندسيا.
 ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين -1

4 - أنشئ المنحنى C_f (نأخذ $\alpha = -\frac{3}{4}$; $f(\alpha) = \frac{2}{3}$)

تمرين 15

I- نعتبر الدالة g_m المعرفة على $[1; +\infty[$ بما يلي $g_m(x) = m^3\sqrt{x-1} - 1$ حيث m بارامتر حقيقي

غير منعدم

1- أدرس حسب قيم m تغيرات الدالة g_m

2- حل في \mathbb{R} حسب قيم m المعادلة $g_m(x) = 1$

II- نفترض فيما تبقى من الأسئلة أن $m \geq 2$

لتكن f_m الدالة العددية المعرفة بـ

$$\begin{cases} f_m(x) = \arcsin\left(\frac{1}{g_m(x)}\right) & ; x \geq 1 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 \\ f_m(x) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2-x} & ; x < 1 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 \end{cases}$$

1- أ- تحقق أن الدالة f_m معرفة على \mathbb{R}

ب- أدرس حسب قيم m اتصال الدالة f_m في $x_0 = 1 + \left(\frac{2}{m}\right)^3$

2- حدد منحنى تغيرات f_m

3- نرمز بـ C_2 لمنحنى f_2 في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f_2(x) - \frac{\pi}{2}}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f_2(x) - \frac{\pi}{2}}{x-2}$ و أول النتيجة هندسيا.

ب- أعط جدول تغيرات f_2

ج- حدد الفرعين اللانهائيين لـ C_2 و أنشئ C_2

تمرين 16

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال \mathbb{R} بـ $g(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

1- أدرس تغيرات الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا ينبغي تحديده

II - لتكن f الدالة المعرفة بما يلي $f(x) = \arcsin(g(x))$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2- أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}^+} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{7}{2}}$ و أول النتيجة هندسيا

3- أعط جدول تغيرات الدالة f

4- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى C_f و أنشئ C_f

5- بين أن f تقابل من D_f نحو مجال I ينبغي تحديده ثم حدد $f^-(x)$ لكل x من I

تمرين 17

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 1} & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) & x < 0 \end{cases}$$

- 1- أ- أدرس اتصال f في النقطة 0
 ب- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 0
 2- أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) < 0$
 ب- أعط جدول تغيرات محددًا نهايتها في $+\infty$ و $-\infty$
 3- أنشئ C_f ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)
 4- نضع $I = \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$. بين أن $f(I) \subset I$
 II- نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

- 1- بين أن $\forall x \in I \quad |f'(x)| < \frac{4}{5}$
 2- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية، بين أن
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| u_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| < \frac{4}{5} \left| u_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right|$
 3- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها
 4- بين أن $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\quad f\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \tan \frac{x}{2}$
 5- نضع $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$
 أ- تحقق أن $a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$; $a_0 = 1$
 ب- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \tan \frac{\pi a_n}{2^{n+2}}$

تمرين 18

- I - لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي
 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$
 1- أعط جدول تغيرات f وتحقق أن $f([1;2]) = [1;2]$
 2- أ- حدد أفاصل نقط انعطاف المنحنى C_f
 ب- أنشئ C_f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 II - لتكن g الدالة العددية لمتغير الحقيقي حيث $g(x) = \arcsin(f(x))$
 1- أ- حدد D_g و أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
 ب- أدرس قابلية اشتقاق g في 0 على اليسار
 ج- أعط جدول تغيرات g
 2- أ- أثبت أنه $\forall t \in [0;1] \quad \arcsin t \geq t$
 ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين C_f و C_g على $]-\infty; 0]$
 3- أرسم بلون مغاير، المنحنى C_g في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 (تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)
 III- نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0 = 2$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$
 نضع $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{2n}$; $w_n = u_{2n+1}$
 1- تحقق أنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [1;2]$
 2- بين أنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n < v_n$ (يمكن استعمال كون $f \circ f$ تزايدية على $[1;2]$)
 3- بين أن (v_n) تناقصية و أن (w_n) تزايدية

$$-4 \text{ أ- بين أنه } \forall x \in [1; +\infty[\quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

ب- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $f \circ f$ ،

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < v_n - w_n < \left(\frac{1}{4}\right)^2 (v_{n-1} - w_{n-1})$$

ج- استنتج أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متحاديتان