تمارين حول دراسة الدوال

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين1

أدرس ومثل مبيانيا الدالة العددية f المعرفة بـ $f(x)=\frac{2}{x}+\ln\frac{x}{2}$

تمرين2

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1- حدد مجموعة تعريف الدالة f و نهايات f عند محداتها

2- أدرس تغيرات f

3- حل المعادلة $f(x)=0$

4- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول 1 ثم أنشئ C_f

تمرين3

أدرس ومثل مبيانيا الدالة العددية f المعرفة بـ $f(x)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$

تمرين4

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=x(1-\ln x)^2 & x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- حدد D_f و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتصال f على يمين 0

2- أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

3- أدرس تغيرات f

4- حدد نقطة انعطاف المنحنى C_f

5- أدرس الفرع اللانهائي ثم أنشئ C_f في م.م.م

تمرين5

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بـ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1- حدد D_f و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- أدرس تغيرات f

3- حدد نقطة انعطاف المنحنى C_f

4 - أدرس الفرعان اللانهائيان ثم أنشئ C_f في م.م.م

5- استعمل C_f لحل المعادلة و المتراجحة التاليتين $x+\sqrt{1+x^2}=1$ $\quad$ $x+\sqrt{1+x^2}\succ 1$

تمرين6

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^x+1\right)$

1- حدد D_f و نهايات f عند محدات D_f

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$

4- حدد معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 0

5- أنشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م

تمرين7

I- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x)=-x+2\sqrt{x}-1$

1- حدد D_f و نهايات f عند محدات D_f

2- أدرس قابلية اشتقاق f علىيمين 0

3- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول التغيرات

II- نعتبر الدالة g حيث $g(x)=-e^x+2\sqrt{e^x}-1$

1- حدد D_g و نهايات g عند محدات D_g و أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g

2- أدرس تغيرات g

3- بين أن C_g تقبل نقطة انعطاف وحددها

4- حدد تقاطع C_g و المستقيم $(\Delta):\ y=1$

5- أنشئ C_g في مستوى منسوب إلى م.م.م

6- ليكن h قصور الدالة g على $]-\infty;0]$

بين أن h تقابل من $]-\infty;0]$ نحو مجال I يجيب تحديده و حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين8

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب

$$\begin{cases} f(x)=e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} & ;\ x\succ 1 \\ f(x)=(1-x)\ln(1-x) & ;\ x\prec 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

2- أدرس الاشتقاق عند 1 و أول النتيجتين هندسيا

3- أحسب $f'(x)$ على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ و أعط جدول التغيرات .

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f

تمرين9

نعتبر $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right)$

1- حدد D_f و نهايات f عند محدات D_f

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- أثبت أن C_f مقعر على D_f

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f (نقبل أنه يوجد عد وحيد ɑ من $\left]\frac{1}{2};1\right[$ حيث $f(\alpha)=0$)

ب- أدرس تغيرات f

تمرين12

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ بحيث $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}+\ln\left|x^2-1\right|$

1- أحسب نهايات f عند محدات D.

2- بين أن $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ لكل x من D

و أعط جدول تغيرات f

3- استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ لكل x من D

II - لتكن g الدالة المعرفة على D بـ $g(x)=x\ln\left|x^2-1\right|$

1- أ- أحسب نهايات g عند محدات D.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2- بين لكل x من D $g'(x)=f(x)$ و أعط جدول تغيرات g.

3- أ- استنتج من دراسة الدالة f إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى C_g

ب- حل في D المعادلة $g(x)=0$

ج- أنشئ C_g

تمرين13

الجزء الأول لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و بين لكل x من $\mathbb{R}$ $f(x)=xe^{2x}\left(1-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{4}{e^x}+\dfrac{4}{xe^x}-\dfrac{2}{xe^{2x}}\right)$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2- أدرس تغيرات f

3- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

ب- بين أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة x_0 تنتمي إلى $[-2;-1]$

$\left(e^4\simeq\dfrac{225}{4};\quad e^2\simeq\dfrac{15}{2};\quad e\simeq\dfrac{11}{4}\right)$

ج- أنشئ C_f $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

الجزء الثاني لتكن g الدالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} g(x)=\left(x^2-4x\right)\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x^2-8x+4\right) & x\succ 0\\ g(0)=-2 \end{cases}$$

1- بين أن $g(x)=f(\ln x)$ $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

2- أدرس اتصال و اشتقاق g في يمين 0

3- أدرس تغيرات g

4- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g

ب- أستنتج من 2- ب- في الجزء الأول, تأطيرا لأفصول نقطة تقاطع C_g ومحور الأفاصيل

ج- حدد نصف المماس لـ C_g في النقطة ذات الأفصول 0 ثم أنشئ C_g

تمرين14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}} & x\prec 0 \\ f(x)=x^2(1-\ln x) & x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة f متصلة في 0

2- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3- أ- بين أن المنحنى C_f يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $-\infty$.

4- بين أن محور الأفاصـــيل مماس للمنحنى C_f عند النقطة O.

5- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها.

6- أ- بين أن $f''(x)=-(1+2\ln x)$ $\forall x\in]0;+\infty[$ و $f''(x)=\dfrac{(5x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$ $\forall x\in]-\infty;0[$

ب- حدد أفصول كل من نقطتي انعطاف المنحنى C_f

7- أنشئ C_f (نأخذ $\frac{e}{2}\approx 1,4$ $\sqrt{e}\approx 1,6$ $\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0,6$ $e^{-1}\approx 0,4$)

تمرين15

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\ln|x-1|+\dfrac{1}{x-1} & x\succ 0 \quad x\neq 1 \\ f(x)=(x-1)e^x+\dfrac{1}{2}x^2 & x\leq 0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة f متصلة في 0

2- أحسب نهايات f عند محدات D

3- أدرس اشتقاق f في 0 و أول النتيجة هندسيا.

4- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها.

5- بين أن النقطة ذات الأفصول3 نقطة انعطاف ل C_f

6- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f.

7- أثبت أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها α حيث $-2\prec\alpha\prec -1$.

تمرين16

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & x\prec 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3) & x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة في0 .

2- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0.

ب- حدد الدالة المشتقة . ثم حدد تغيرات f .

3- بين أن النقطة $A\left(1;-\frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f و أكتب معادلة ديكارتية لمماس C_f في النقطة A

.

4- أ- حدد تقاطع C_f و محور الأفاصيل .
ب- بين أن C_f يقبل فرعا شلجميا و أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ C_f بجوار $-\infty$.
ج- أنشئ C_f.

تمرين17

I- 1- تأكد أن $\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$
2- أحسب $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$ $\left(t=\sqrt{e^x-1}\right)$
II- نعتبر $f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln\frac{x+1}{2}$
1- حدد D_f ونهايات f عند محداتها
2- أدرس تغيرات f
3- تحقق أن $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف C_f و أعط معادلة المماس عند هذه النقطة.
4- أدرس الفروع اللانهائية ثم أنشئ C_f
5- أحسب حيز المستوى المحصور بين C_f ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\frac{1}{2}$; $x=1$ على التوالي

تمرين18

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=2x-2+\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2}$
1- أحسب نهايات f عند محدات $\mathbb{R}^*$
2- بين أن $f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2-x+2)}{x(x^2-2x+2)}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و أعط جدول تغيرات f
3- أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f
ب- أدرس الوضع النسبي لـ C_f و المستقيم $(D):\ y=2x-2$
ج- بين أنه يوجد عدد α من $\left]\frac{-1}{2};\frac{-1}{3}\right[$ حيث $f(\alpha)=0$ $\left(\ln 25\succ\frac{8}{3}\quad;\quad \ln 13\prec 3\right)$
د- أنشئ C_f
4- أ- تحقق أن $\frac{2x-4}{x^2-2x+2}=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-\frac{2}{1+(x-1)^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$
ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين C_f و المستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=1$; $x=2$ و $y=2x-2$

تمرين19

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $f(x)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right)$

1- أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
2- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
3- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f
4 - أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f
ب- أنشئ C_f

5- أ- تحقق أن $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

ب- ليكن $\lambda\in]0;1[$ أحسب $I=\int_\lambda^1\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

ج- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$; $x=\lambda$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to 0}A(\lambda)$

تمرين20

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2x^2-3x)e^x$

-1 أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f

ج- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f و أنشئ C_f

-2 نعتبر المعادلة التفاضلية $E:\ y''-2y'+y=4e^x$

أ- بين أن f حل للمعادلة E

ب- حل المعادلة E

ج- بين أنه توجد دالة أصلية F للدالة f تحقق $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)-2f(x)+F(x)=4e^x$

استنتج $F(x)$

-3 ليكن $\alpha\in]-\infty;0[$

أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$; $x=\alpha$ ثم حدد $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}A(\alpha)$

تمرين21

1- نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$

a)- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

b)- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1+x)=0$ و أول النتيجة هندسيا ثم أنشئ C_f

2- نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$

a)- بين أن $g'(x)=e^{-x}f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

b)- - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

c)- أعط جدول تغيرات g و أنشئ C_g

3- ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ نضع $I(\lambda)=\int_0^\lambda g(x)dx$

a)- أحسب $I(\lambda)$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

b)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}I(\lambda)$

4- نعتبر المعادلة $E:\ y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$

a)- بين أن g حل للمعادلة E.

b)- حل المعادلة E

تمرين22

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+1+e^{-x}$

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و استنتج إشارة $f(x)$

2- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln\left(x+1+e^{-x}\right)$

أ- أدرس تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

ب- a) بين أن $\lim_{x\to-\infty} g(x)+x=0$ وأول النتيجة هندسيا

b) بين أن $g(x)+x\prec 0$ $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[$

c) بين أن $0\prec g(x)-\ln x\le\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$. استنتج $\lim_{x\to+\infty} g(x)-\ln x$

ج- أنشئ المنحنيين C_g و $C_{\ln}$ في نفس المعلم لمتعامد الممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3- نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y'+y=x+2$

تأكد أن f حل خاص للمعادلة E و حل المعادلة E.

تمرين23

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\left]-1;+\infty\right[$

$$f(x)=x+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}$$

$$g(x)=(x+1)^2+2-2\ln(x+1)$$

1- أحسب $g'(x)$. استنتج أن g تقبل قيمة دنيا ثم إشارة $g(x)$.

2- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-1} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f

3- بين أن المستقيم $(D): y=x$ مقارب مائل للمنحنى C_f وحدد وضعيته بالنسبة للمنحنى .

4 - أنشئ C_f.

5- a) حدد دالة أصلية لدالة h على $\left]-1;+\infty\right[$ حيث $h(x)=\frac{1}{x+1}\times\ln(x+1)$

b) أحسب مساحة الحيز المحصور بين C_f و مح الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=e-1$; $x=0$.

تمرين 24

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-1)^2e^{2x}$

1) حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f و أنشئه في مستوى منسوب إلي معلم م.م.

4) a- بين أن الدالة f تحقق العلاقة $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=2e^{2x}$

b- استنتج دالة أصلية للدالة f .

c- حل المعادلة التفاضلية $y''-4y'+4y=2e^{2x}$

5) a- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$; $x=\lambda$ حيث $\lambda\prec 1$

b- أحسب $\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

1- a) حدد $\lim_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

b) أدرس اتصال g في 0 ثم اشتقاق على يمين و يسار 0 و أول النتيجتين هندسيا .
3- أحسب مساحة الحيز المحصور بين C_g و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=-e \quad ; \quad x=-1$

تمرين25

A) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بـ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x-\ln(x+1)$

3- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to0^+} f(x)$

2- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و استنتج إشارة $f(x)$

B) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} g(x)=e^{(x+1)(\ln x-\ln(x+1))} & x\succ 0 \\ g(x)=-x\ln(-x) & x\prec 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

3- a) بين أن
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*} \quad g'(x)=f(x)\times g(x)$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^{-*} \quad g'(x)=-1-\ln(-x)$$

b) أعط جدول تغيرات g

c) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_g.ثم أنشئ C_g.

تمرين 26

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=-xe^{x+1} & x\le -1 \\ f(x)=-x+(x+1)\ln(x+1) & x\succ -1 \end{cases}$$

3- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس اتصال f في -1.

ج- أدرس اشتقاق f على يمين ويسار -1 و أول النتيجتين هندسيا.

4- أحسب $f'(x)$ على $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$ و أعط جدول تغيرات f

5- أ- بين أن C_f تقبل نقطة انعطاف في النقطة I التي أفصولها -2 .

ب- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I.

6- أ ـ أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ C_f $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ نأخذ $(e^{-1}\simeq 0,4)$

ج- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f ومحور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=e-1$.

7- نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y''-2y'-3y=4xe^{x+1}$

أ – بين أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=-xe^{x+1}$ حل خاص للمعادلة E.

ب- حل المعادلة E.

تمرين27

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=2\ln x-(\ln x)^2 & x\succ 0 \\ f(x)=x^2e^x+1 & x\le 0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x\to-\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x\to0^+} f(x)$

1- a) أحسب $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا b) أحسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

c) أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها.

3 – أحسب $f''(x)$ على $\mathbb{R}^*$. حدد أفاصيل نقط انعطاف المنحنى C_f.

4-a) أدرس الفروع اللانهائية   b) حدد تقاطع C_f ومحور الأفاصيل.

c) أنشئ C_f . $\left(4e^{-2}=0,54\right)$

5- حدد مساحة الحيز المحصور بين C_f ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بـ $x=1$; $x=e^2$

تمرين 28

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x} & x\succ 0 \\ f(x)=xe^x & x\leq 0 \end{cases}$$

1- لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب $g(x)=x^2+3-2\ln x$

أدرس تغيرات g و استنتج إشارة $g(x)$.

1- a) حدد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ و أحسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^{-*}$.

c) أعط جدول تغيرات f.

d) بين أن C_f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة ذات الأفصول2- .

2- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f و أنشئ C_f.

3- حدد مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$; $x=e$

4- نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y''-3y'+2y=-e^x$

a) تأكد أن الدالة $x\to xe^x$ حل خاص للمعادلةE

b) حل المعادلة E.

تمرين29

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+2}\ln(x+2) & x\geq -1 \\ f(x)=(x+1)e^{x+2} & x\prec -1 \end{cases}$$

1- a) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) بين أن f متصلة في 1- و أدرس اشتقاق f في 1-

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها.

3- أدرس تقعر المنحنى C_f.

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f .

5- حدد مساحة الحيز المحصور بين C_f ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بـ $x=-1$; $x=e^2-2$

تمرين30

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} & x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 & ;\quad f(1)=0 \end{cases}$$

(A) - ليكن C_f منحنى f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- أدرس اتصال f في 1 و اشتقاق f على يمين 0 ثم على يسار1

2- أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) بين أن المستقيم $(D): y=x$ محور تماثل للمنحنى C_f

ب) حدد نقطة تقاطع C_f و(D)

ج) أنشئ المنحنى C_f

(B)- نعتبر الدالة العددية F المعرفة بـ: $\forall x \cup]1;+\infty[\quad F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$

1- أ) بين أنه $\forall x]1;+\infty[\quad f(x+1)\le F(x)\le f(x)$

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2- أ) بين أن $e^u \ge u+1 \quad \forall u\in]0;+\infty[$

ب) استنتج أنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x)-1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

ج) بين أن $\ln t \le t-1 \quad \forall t\in]1;+\infty[$

د) استنتج أن $\forall x\in]1;+\infty[\quad \int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}\,dt \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

ه) حدد $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$

3- أدرس تغيرات F

4- أنشئ منحنى الدالة F

تمرين31

لتكن C مجموعة الدوال المتصلة في $\mathbb{R}$. نذكر أن $(C;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

نعتبر E مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق مرتين في $\mathbb{R}$ و التي

تحقق: $\forall x\in\mathbb{R} \quad 4f''(x)-4f'(x)+f(x)=0$

f' و f'' المشتقة الأولى و المشتقة الثانية للدالة f

1- بين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

2- ليكن a عدد حقيقي

بين أن الدالة $x\to e^{ax}$ تنتمي إلى E إذا وفقط إذا كان $a=\frac{1}{2}$

3- أ) بين أن $f\in E$ إذا وفقط إذا كانت الدالة g المعرفة بـ

$\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x)=e^{-\frac{x}{2}}f(x)$ تحقق $\forall x\in\mathbb{R} \quad g''(x)=0$

ب) استنتج أن E هي مجموعة الدوال $f_{a;b}$ حيث $\forall x\in\mathbb{R} \quad f_{a;b}(x)=(ax+b)e^{\frac{x}{2}}$

a و b عددان حقيقيان اعتباطيان

ج) بين أن $(f_{1;0} : f_{0;1})$ أساس لـ E

4- نعبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$$v(x)=\left(-\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}} \quad ; \quad u(x)=xe^{\frac{x}{2}}$$

أ – بين أن u و v أساس لـ E

ب- أدرس تغيرات u و v و أنشئ منحنييهما C_u و C_v

ج- حدد تقاطع C_u و C_v

د- ليكن λ عدد سالب

أحسب A_λ مساحة الحيز المحصور بين C_u و C_v و المستقيمين $(\Delta_1): x=\lambda \quad ; \quad (\Delta_2): x=\frac{2}{3}$

حدد $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A_\lambda$

تمرين32

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة $]0;+\infty[$ بما يلي $f(x)=4\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$ ، و ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و حدته $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ، ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

2- أ) بين أن $f'(x)=4\left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right) \quad \forall x\in]0;+\infty[$.

ب) أعط جدول تغيرات f.

3- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين β و α بحيث

$1\prec \alpha \prec \sqrt{e} \prec \beta \prec 3$ (نعطي $1\prec \ln 3 \prec 1,1$)

4- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1.

5- أرسم المنحنى (C).

III- لكل عدد صحيح n بحيث $n\geq 4$ ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x)=n\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل لدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

1- أدرس تغيرات الدالة f_n.

2- أدرس تقعر (C_n) و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$.

3- أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x.

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و(C_{n+1}).

4- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث $1\prec u_n \prec \sqrt{e} \prec v_n$

5- بين أن $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا (يمكن استعمال نتيجة السؤال 3-III).

6- أ) باستعمال نتيجة السؤال 2-II)، بين أن :

$$\forall n\geq 4 \qquad \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leq \ln(u_n)\leq u_n-1$$

ب) استنتج أن: $\forall n\geq 4 \qquad \dfrac{(u_n)^2}{2n}\leq u_n-1\leq \dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

ج) بين أن $\forall n\geq 4 \qquad \dfrac{1}{2n}\leq u_n-1\leq \dfrac{e}{n}$

د) استنتج أن $(u_n)_{n\geq 4}$ متقاربة محددا نهايتها.

7- أ) بين أن $e^{\frac{5}{6}}\prec v_n \quad \forall n\geq 4$ (نعطي $e^{\frac{5}{6}}\prec 5,3$).

ب) استنتج أن $\lim\limits_{n\to +\infty} v_n=+\infty$

تمرين33

I- ليكن $n\in \mathbb{N}^*$.

نعتبر g_n الدالة العددية المعرفة $\mathbb{R}$ بما يلي $g_n(x)=x+e^{-nx}$ ، و ليكن (C_n) منحنى الدالة

g_n في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- أ- أدرس تغيرات g_n

ب- بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n

2- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n\left(x\right)$ ،

ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_n\right)$

3- أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $\left(C_1\right)$ و $\left(C_2\right)$ المثلين g_1 و g_2

ب) أنشئ $\left(C_1\right)$ و $\left(C_2\right)$ (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$; $\ln 2\approx 0;7$)

4- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب بدلالة x التكامل: $I\left(x\right)=\int_0^x te^{-2t}dt$

ب) لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على $\left[0;\ln 2\right]$.

أحسب حجم مجسم الدوران المولد من دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل.

1- نضع $v_n=g_n\left(u_n\right)$

بين أن المتتاليتين $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتهما.

IIنعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n\left(x\right)=x+e^{nx}$

و ليكن $\left(\Gamma_n\right)$ المنحنى الممثل لدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

1- أدرس تغيرات الدالة f_n .

2-استنتج أن المعادلة $f_n\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n .

3- أ) بين أن $\alpha_1\in\left]-\ln 2;-\frac{1}{2}\right[$

ب) بين أن $x-\alpha_1$ و $e^x+\alpha_1$ لهما نفس الإشارة.

4- أ) لتكن φ الدالة المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ بما يلي $\varphi\left(x\right)=e^x-\frac{1}{\sqrt{e}}x$

بين أن φ تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

ب) استنتج أن $\left|e^x+\alpha_1\right|\le\frac{1}{\sqrt{e}}\left|x-\alpha_1\right|$

5- نضع $\beta_0=-\frac{1}{2}$ و لكل عدد صحيح طبيعي n : $\beta_{n+1}=e^{-\beta_n}$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي a حيث $\left|\beta_{n+1}-\alpha_1\right|\le a\left|\beta_n-\alpha_1\right|$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

ب) بين أن المتتالية $\left(\beta_n\right)$ متقاربة وحدد نهايتها.