تمارين حول الأعداد العقدية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1

-1 حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$

-2 أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$

-3 أحسب $\sum_{k=0}^{k=521} i^k$

تمرين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$

-1 نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ و $i\neq z$ و $z\neq 1$

حدد الشكل الجبري للعددين $\frac{1-z}{1+iz}$ و $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$

-2 حدد (E) مجموعة النقطB حيث A وB وC نقـــط مستقيمية

-3 حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$ عدد تخيلي صرف.

تمرين 3

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية $-2i\cdot\overline{z}+z=1$ و $(1-i)z-2\overline{z}=1-5i$

و $z\cdot\overline{z}+\overline{z}=4-3i$ و $2|z|^2-z^2=3$

تمرين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط M(z) في كــل حالة من الحالتين التاليتين

-1 $|z-1+i|=3$ -2 $|z-2|=|z+2i|$

تمرين 5

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد عقديـــة $3+i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{24}$

تمرين 6

نعتبر العددين العقدين $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ و $u=2-2i$

-1 احسب معيار وعمدة كل من u و v

-2 حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتــج $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$

تمرين 7 نضع $u=-2+2i$

-1 أحسب معيار و عمدة u

-2 حل جبريا $z^2=u$ و استنتج $\sin\frac{3\pi}{8}$; $\cos\frac{3\pi}{8}$

تمرين 8

نعتبر العــدد العقـدي $z=1+i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمرين9

1- ليكن $z_0=\left[1;\frac{2\pi}{5}\right]$. نضع $\alpha=z_0+z_0^4$ و $\beta=z_0^2+z_0^3$

أ- بين أن $1+\alpha+\beta=0$

ب- استنتج أن α و β حلي المعادلة $x^2+x-1=0$

2- أ- حدد α بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و $A_4(z_0^4)$

حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمرين10

1- بين أن $1+e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$

2- $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. أحسب بدلالة $\tan\theta$ العدد $z=\frac{e^{i2\theta}-1}{e^{i2\theta}+1}$

تمرين11

بين أن $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\frac{\pi}{22}}$

استنتج $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

تمرين12

ليكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$. بين أن $|z-z'|^2\leq\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)$

تمرين13

ليكن $(x;\alpha)\in\mathbb{R}^2$

أحسب $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)$ و $C_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)$

(يمكن حساب C_n+iS_n)

تمرين14

اختصر الكتابة $C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

تمرين15

ليكن $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

نعتبر المعادلة (E): $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ $\quad z\in\mathbb{C}$

1- ليكن z_0 حل للمعلدلة (E)

أ- بين أن $|1+iz_0|=|1-iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

2- أ- أحسب $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$

ت- نضع $z=\tan\theta$ حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. استنتج حلول المعادلة (E)

تمرين 16

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=iz^3-(-3+2i)z^2+(-6+4i)z-8i$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أنها تقبل حلا حقيقيا.

2- لتكن A وB وC صور جذور المعادلة $P(z)=0$. بين أن المثلث ABC قائم الزاوية.

تمرين 17

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3-(-1+4i)z^2+(2-12i)z-20-12i$

1- حدد جبريا الجذرين المربعين للعدد -27 + 36i

2- بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا وحدده.

3- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

4- لتكن A وB وC صور جذور المعادلة $P(z)=0$

بين أن AوBوC نقط مستقيمية

تمرين18

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\quad z^2+2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0$ حيث $\theta\in]-\pi;\pi[$

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار و عمدة جذري المعادلة (E) (ناقش حسب قيم θ)

تمرين19

1- حدد الجذور المكعبة للعددين $v=8i$ و $u=\sqrt{3}+i$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-(\sqrt{3}+9i)z-8(1-i\sqrt{3})=0$

استنتج حلول المعادلة $z^6-(\sqrt{3}+9i)z^3-8(1-i\sqrt{3})=0$

تمرين20

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^5+1=0$

2- أنشئ صور z_0وz_1و z_2و z_3و z_4 جذور المعادلة $z^5+1=0$

أ- بين أن $z_0+z_1+z_2+z_3+z_4=0$

ب- استنتج أن $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

تمرين21

1- أكتب على الشكل المثلثي الحلول الثلاثة لكل من المعادلتين $z^3=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z^3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$

تمرين22

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع $u=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

1- اثبت أن $[2\pi]$ $\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}:\arg u\equiv-\arg z+2\arg(z-i)$ و أن $|u|=|z|$

2- بين إذا كان $1=|z|$ فان $u=-i$

3- حدد مجموعة النقط M(z) حيث u تخيلي صرف.

تمرين23

نعتبر المعادلة (E) $z^2+i\left(2^{\theta+1}\sin\theta\right)z-2^{2\theta}=0$ $z\in\mathbb{C}$ حيث $\theta\in[0,2\pi[$

1- حل المعادلة (E) و أكتب الحلين على شكلهما المثلثي

2- في المستوى العقدي نعتبر A و B صورتي حلي المعادلة (E)

3- حدد θ لكي يكون OAB مثلث متساوي الأضلاع

تمرين24

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $E_n:\quad z^n=(iz-2i)^n$

حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_2)

2- أ- أكتب كلا من العددين $1+i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي.

ب- استنتج أن $1+i\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة (E_{12})

3-أ – في المستوى العقدي،حدد مجموعة النقط M(z) حيث z يحقق المعادلة (E_1)

ب- استنتج جميع حلول المعادلة (E_n) تكتب على الشكل $1+ai$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

تمرين25

نعتبر $P(z)=(m-3)z^6-m\left(3z^4-9z^2\right)-81$

1- نفترض أن m=0، حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ثم أكتب الحلول على الشكلين المثلثي و الجبري .

2- نضع m=4

أ- حدد العددين a و b لكي يكون $P(z)=\left(z^2-9\right)\left(z^4+az^2+b\right)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

ج- تحقق أن الحلول تكتب على الشكل $z_k=3\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$

تمرين26

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z-8\left(1+i\sqrt{3}\right)$

1- بين أن العدد $z_1=1+i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $P(z)=0$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ (ليكن z_2 و z_3 الجذرين الآخرين)

3- لتكن A وB وC و D على التوالي صور الأعداد العقدية z_1 و z_2 و z_3 و $\frac{2}{z_1}$.

بين أن النقط A وB وC و D متداورة

تمرين27

1- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-2-2i\sqrt{3}$

a. حل المعادلة $(E):z\in\mathbb{C}\quad z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)z+2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$

2- نضع $u=\left(\overline{z_1}\right)^2+\left(\overline{z_2}\right)^2$ حيث z_1 و z_2 هما حلا (E)

3- تحقق أن $u=2-2i\sqrt{3}$ ثم أعط الشكل المثلثي للعدد u

4- أثبت أن u^{2001} عدد حقيقي سالب

5- نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ النقط A و B و C صور الأعداد العقدية 2 و $1+i\sqrt{3}$ و $3+i\sqrt{3}$ على التوالي .

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين28

نعتبر المعادلة (E) : $z\in\mathbb{C}\quad z^3+(-2+i)z^2+3(1-i)z+2i-2=0$

1- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_1 مع تحديده

2- أ- حدد الجذرين المربعين لـ $-8+6i$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+(-1+i)z+2-2i=0$

3- حدد الجذرين الآخرين z_2 و z_3 للمعادلة (E).

4- أ- أنشئ النقط $A(z_1)\ ;\ B(z_2)\ ;\ C(z_3)$ في المستوى العقدي .

ب- حدد العدد a لحق M حيث $MA=MB=MC$

تمرين29 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلتين

$$(E)\quad z^2+(1+i)z+2i=0$$

$$(F)\quad z^3+2-2i=0$$

1- حل المعادلة (E).

2- أ- تأكد أن $z_1=1+i$ جدر للمعادلة (F) ثم حدد الجذرين الآخرين z_2 و z_3 للمعادلة (F) في شكلهما الجبري.

ب- حدد جذور المعادلة (F) في شكلها المثلثي.

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_3}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$

تمرين30

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3=1$ و أكتب جدورها في شكلها المثلثي ثم الجبري.

2- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\quad z^3=2-11i$

أ- تأكد أن $z_0=2-i$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتج حلول المعادلة (E) بوضع $z=tz_0$ حيث t عدد عقدي.

تمرين31

1- بين أن $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\qquad \forall z\in\mathbb{C}-\{-i\}$

2- استنتج أن حلول المعادلة $\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n}=e^{i\theta}$ كلها حقيقية حيث $\theta\in\mathbb{R}\qquad n\in\mathbb{N}^*$

3- نضع $\theta=\frac{\pi}{4}\ ;\ n=2$

أ-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب- استنتج حلول المعادلة $\frac{(z-i)^2}{(z+i)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين32

نعتبر في المستوى العقدي التطبيق

$$F:\ (P)\to(P)\qquad M(z)\to M'(-jz+i)$$

حيث $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1- بين أن F تقبل نقطة صامدة و حيدة Ω نرمز للحقها بـ ω حدد طبيعة F و عناصرها المميزة.

2- نعتبر متتالية من نقط المستوى (P) المعرفة بما يلي $M_0=O\ ;\ M_{n+1}=f(M_n)\quad \forall n\in\mathbb{N}$

أ- أنشئ Ω ; M_1 ; M_2

ب- نرمز بـ z_n لحق M_n نضع $Z_n = z_n - \omega$ $\forall n \in \mathbb{N}$

بين أن $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية في $\mathbb{C}$ و أكتب أساسه على الشكل المثلثي

ت- أحسب Z_n ثم z_n بدلالة n و أنشئ M_{1996}

تمرين33

نعتبر المعادلة (E) التالية: $z^2\cos^2 t - 4z\cos t + 5 - \cos^2 t = 0$ $z\in\mathbb{C}$ (E): حيث $t\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1- حل المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

M_1 و M_2 هما صورتا حلي المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t في $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و أنشئها في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

تمرين34

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

1- ABC مثلث في المستوى. الأعداد العقدية a و b و c هي على التوالي ألحاق النقط A و B و C.

بين أن ABC يكون مثلثا متساوي الأضلاع اذا و فقط اذا كان: $a+bj^2+cj=0$ أو $a+bj+cj^2=0$

(نذكر أن $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $1+j+j^2=0$)

2- نعتبر في الدائرة C التي مركزها O و شعاعها 1 ست نقط A' و B' وC' و D' و E و F مختلفة

مثنى مثنى تحدد ثلاث أقواس $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{C'D'}$ و $\overset{\frown}{EF}$ في الاتجاه المباشر قياس كل واحد منها هو $\frac{\pi}{3}$.

و لتكن النقط M و N و P على التوالي منتصفات $[B'C']$ و$[D'E]$ و $[FA']$.

بين أن MNP مثلث متساوي الأضلاع

تمرين35

في المستوى (P) العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$،

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بـ

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{2z(z+\bar{z})}{(z-\bar{z})^2} & ; \quad z\in\mathbb{C}-\mathbb{R} \\ f(z)=0 & ; \quad z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

و ليكن F التطبيق في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M(z)$

بنقطة $M'(f(z))$

1- أثبت أن النقط O و M وM' مستقيمية

2- بين أن مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق هي الشلجم (Γ) الذي معادلته $y^2=-x$

3- نضع $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ و $\theta\in\left]-\pi;\pi\right[-\left\{-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2}\right\}$

أ- حدد، حسب قيم θ معيار و عمدة العدد $f(z)$

ب- أكتب بدلالة θ ، الصيغة الجبرية للعدد $f(z)$

ج- بين أن صورة المستوى (P) بالتطبيق F هو الشلجم (Γ)

4- أعط طريقة لانشاء صورة M بالتطبيق F

تمرين36

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$

نقطتين. نعتبر $M(z)$ حيث $z \neq -2+3i$ نضع $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$

ب- حدد و أنشئ المجموعتين

$$(E_1) = \left\{M(z)/\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]\right\}$$

$$(E_2) = \left\{M(z)/|z'| = 2\right\}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2

تمرين37

نعتبر التطبيق f_a من $\mathbb{C}-\{a\}$ نحو $\mathbb{C}-\{a\}$ المعرفة بـ $f_a(z) = \frac{az}{z-a}$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$

1- بين أن $f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$

2- ليكن $z \in \mathbb{C}-\{a\}$. نضع $|z-a| = r$ و $\arg(z-a) \equiv \theta \quad [2\pi]$

أحسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r و $|a|$ ثم $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و $\arg a$

3- نضع فيما يلي $a = -1+i$ و نعتبر المستوى العقديالمنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

$$(C) = \left\{M(z)/|f_a(z)-a| = 2\right\}$$

$$(E) = \left\{M(z)/f_a(z) \in i\mathbb{R}\right\}$$

$$(D) = \left\{M(z)/\arg(f_a(z)-a) \equiv \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]\right\}$$

أ- حدد كلا من (C) و (E) و بين أن (D) نصف مستقيم طرفه $A(a)$ محروم من $A(a)$ محددا معادلة ديكارتية له

ب- ليكن $z_0 \in \mathbb{C}-\{a\}$ و النقطة $B(z_0)$ بحيث B تنتمي الى $(C)\cap(D)$.

أكتب $f_a(z_0)$ على الشكل الجبري ثم استنتج z_0

ث- أنشئ المجموعات (C) و (E) و (D) في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

تمرين38

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

وليكن f التطبيق من $\mathbb{C}^*$ الى $\mathbb{C}$ بحيث $f(z) = \frac{z+i}{\overline{z}}$

1- حدد مجموعة النقط التي لحقها z بحيث $|f(z)| = 1$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = z\cdot\overline{z}$

3- نضع $z = \cos\theta - i\sin\theta$ حيث $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- مثل النقط $A(i)$ و $B(\overline{z})$ و $C(z)$

ب- لتكن D نقطة لحقها $z+i$

تحقق أن $OCDA$ معين و استنتج عمدة $z+i$ ثم عمدة $f(\overline{z})$ بدلالة θ

ج- حدد معيار $f(\overline{z})$ بدلالة θ

تمرين39

نعتبر $p(z) = z^{10} - 2z^5\cos\alpha + 1$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

2- استنتج على الشكل المثلثي حلول المعادلة: $p(z) = 0$

3- بين أن $\quad p(z)=\prod_{k=0}^{4}\left(z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{5}\right)+1\right) \quad \forall z\in\mathbb{C}$

4- أ- أحسب $p(1)$ ثم استنتج أن $\quad \prod_{k=0}^{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{10}+\frac{k\pi}{5}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{256}$

ت- ليكن $\alpha\in\left]0;\pi\right[$

بين أن $\quad \prod_{k=1}^{4}\sin\left(\frac{\alpha}{10}+\frac{k\pi}{5}\right)=\frac{1}{16}\times\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{10}\right)}$

ثم استنتج أن قيمة الجداء $\quad \sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{3\pi}{5}\cdot\sin\frac{4\pi}{5}$