تمارين حول الحسابيات

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين1

-1 بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad n\left(n^4-1\right) \equiv 0 \quad [5]$

-2 بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على13

-3 بين أن 17 يقسم $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

-4 ليكن n من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4

-5 حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون $2\cdot 3^n+3 \equiv 0 \quad [11]$

-6 حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد $19^{60}\times 23^{27}$ على 7

تمرين2

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة $\mathbb{N}^*$ بحيث $u_0 \wedge q = 1$ و الأعداد u_0 وu_1 و u_2 وu_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q تحقق $u_1+2u_3=44u_0^2$

تمرين3

بين إذا كان $a\wedge b=1$ فان $(a+b)\wedge b=1$ و $(a+b)\wedge ab=1$

استنتج أن $\dfrac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

تمرين4

بين أن العدد $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ عدد لاجدري

تمرين5

ليكن $(a;b)\in\mathbb{Z}^{*2} \quad ; \quad a\wedge b=\delta$

بين أن $(4a+3b)\wedge(5a+4b)=\delta$

تمرين6

برهن أن $\forall (a;b)\in\mathbb{Z}^{*2} \quad a\wedge b=1 \Rightarrow (a+b)\wedge\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)\wedge 3$

تمرين7

بين أن $2^n / \left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

تمرين8

-1 برهن أن $\forall (a;b;c)\in\mathbb{Z}^3 \quad a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

-2 بين أن $\forall n\in\mathbb{Z} \quad \left(5n^3-n\right)\wedge(n+2)=(n+2)\wedge 38$

-3 حدد الأعداد الصحيحة النسبية n بحيث $n+2$ يقسم $5n^3-n$

-4 ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك للعددين $n+2$ و $5n^3-n$

-5 حدد المجموعة $A=\left\{n\in\mathbb{Z} / \ \left(5n^3-n\right)\wedge(n+2)=19\right\}$

تمرين9

حل في $\mathbb{Z}^2 \qquad 3x+2y=xy$

تمرين10

-1 حل في $\mathbb{Z}^2 \qquad 5x-3y=2$

-2 ليكن $A=\overline{35}_{(x)} \quad ; \quad A=\overline{37}_{(y)} \quad ; \quad x\le 12 \quad y\le 20$

حدد القيم الممكنة للعددين x وy ثم أكتب A في نظمة العد العشري

تمرين11

1- حل في $\mathbb{N}^{*2}$ النظمة $\begin{cases} x+y=504 \\ x\wedge y=24 \end{cases}$

2- حل في $\mathbb{N}^{*2}$ النظمة $\begin{cases} x\vee y-x\wedge y=55 \\ 0\prec x\prec y \end{cases}$

3- حل في $\mathbb{N}^{*3}$ النظمة $\begin{cases} x+y+z=102 \\ x\wedge y=12 \\ y\wedge z=18 \end{cases}$

تمرين12

1- حل في $\mathbb{Z}^2$ $13x-6y=-5$

2- استنتج في $\mathbb{Z}$ حلول النظمة $\begin{cases} z\equiv 2 \quad [6] \\ z\equiv 7 \quad [13] \end{cases}$

تمرين13

ليكن $b\in\mathbb{N}^*$ و $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / bx+(b+1)y=1\right\}$

1- بين أن $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2 \quad \left[(x;y)\in A\Leftrightarrow b(x-b)+(b+1)(y+b-1)=0\right]$

2- حدد المجموعة A

تمرين14

ليكن x عدد فردي من $\mathbb{Z}$

1- بين أن $x^2\equiv 1 \quad [8]$

2- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $8y+1=x^2$

تمرين15

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $d=\left(n^2+1\right)\wedge(n+1)$

1- ا- حدد العدد d حسب زوجية n

ب- بين أن n^2+1 ليس مربعا كاملا لكل n من $\mathbb{N}^*$

2- a وb وn أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة حيث $a\wedge b=1$ و $a\left(n^2+1\right)=b^2(n+1)$

أ- بين أن $a\wedge b^2=1$ و $a\leq n$ و $b\leq n$

ب- بين أن $\left(n^2+1\right)\wedge(n+1)=2$

ج- نضع $n^2+1=2p \quad ; \quad n+1=2q$ بحيث $(p;q)\in\mathbb{N}^{*2}$ و $p\wedge q=1$

بين أن $a=q \quad ; \quad b^2=p$

د- نضع $b=a+1$. أحسب a وb وn

تمرين16

ليكن $(x;y)\in\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $x\wedge y=1$

1- بين اذا كان أحد العددين $x+y$ و xy زوجيا فان الأخر فرديا

2- حدد في $\mathbb{N}^*$ قواسم 84

3- حدد في $\mathbb{N}^*$ العددين a و b حيث $\begin{cases} a+b=84 \\ a\vee b=(a\wedge b)^2 \end{cases}$

تمرين17

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$

1- بين أن $(a+b)\wedge(a\vee b)=a\wedge b$

2- حل في $\mathbb{N}^*$ النظمة $\begin{cases} a+b=60 \\ a\vee b=72 \end{cases}$

تمرين18

ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $(x-2n)(y-2n)=2n^2$ $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

ليكن $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$

1- بين أن $\delta/(x\wedge y)$

2- بين أن $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$ و استنتج أن $(x\wedge y)/\delta$

3- بين أن $(x\wedge y)/n$

4- أحسب x وy اذا علمت أن $x\wedge y=1$ و $n=30$

تمرين19 (دورة فبراير 1997)

أوجد في نظمة العد العشري العددين الصحيحين الطبيعيين اللذين يكتبان في نظمة العد ذات الأساس 5 على الشكل $\overline{n010n}_{(5)}$ حيث n عدد صحيح طبيعي أولي.

تمرين20(دورة فبراير 1997)

1- ليكن $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ حيث $(a+b)\wedge ab=p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي

أ- بين أن p^2/a^2 و استنتج أن p/a و p/b

ب- بين أن $a\wedge b=p$ أو $a\wedge b=p^2$

2- نعتبر في $\mathbb{N}^2$ النظمة $(S):\ \begin{cases} (a+b)\wedge ab=49 \\ a\vee b=231 \end{cases}$

أ- بين أن $a\wedge b=7$

ب حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة (S)

تمرين21(دورة استدراكية فبراير 1997)

نعتبر نظمة العد ذات الأساس a حيث $\overline{122}_{(a)}\times\overline{103}_{(a)}=\overline{13121}_{(a)}$. حدد a

تمرين22(دورة استدراكية فبراير 1997)

1- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3u-8v=6$

2- حدد الأعداد الصحيحة النسبية x التي تحقق النظمة $\begin{cases} x\equiv 1 & [3] \\ x\equiv 7 & [8] \end{cases}$

تمرين23

1- حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة بحيث يكون العدد الممثل في نظمة العد ذات الأساس 7 بـ $\overline{bbac}$ ممثلا في نظمة العد ذات الأساس 11 بـ $\overline{abca}$

2- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ بحيث $n=\overline{52}_{(x)}$ و $n=\overline{43}_{(y)}$

حدد x و y

3- حدد الأرقام x و y بحيث يكون العدد الممثل في نظمة العد العشري بـ $\overline{11x1y}$ قابل للقسمة على28

4- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ بحيث $\overline{36}_{(n)}+\overline{45}_{(n)}=\overline{103}_{(n)}$: أحسب $\overline{36}_{(n)}\times\overline{45}_{(n)}$

5- حل في $\mathbb{Z}/1999\mathbb{Z}$ المعادلة $x^2+\overline{2001}\cdot x-\overline{3}=\overline{0}$

تمرين24

نضع $a=\overline{2310}_{(n)}$ و $b=\overline{252}_{(n)}$ و $d_n=a\wedge b$

1- بين أن $(2n+1)/b$ و $(2n+1)/a$

2- حدد بدلالة n : $(n^2+n)\wedge(n+2)$ (ناقش حسب زوجية n)

3- بين أن $d_n\in\{2(2n+1);2n+1\}$

4- نأخذ $n=6$ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $ax+by=-26$

تمرين25

ليكن $(a;b;c)\in\mathbb{N}^{*3}$ بحيث $a\wedge b=1$; $ab=c^2$

بين أن: $b=\beta^2$ et $a=\alpha^2$ $\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^{*2}$

تمرين26

ليكن $(a;b;c)\in\mathbb{N}^{*3}$. بين أن $a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$

تمرين27

ليكن p و q عددين أوليين مختلفين. بين أن $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1\quad[pq]$

تمرين28

ليكن $(a;b;c)\in\mathbb{Z}^{*3}$ بحيث $a^2\neq b^2$

1- أثبت أنه اذا كان $c\wedge 2=1$ فان: $[c/a+b\quad et\quad c/a-b]\Rightarrow[c/a\quad et\quad c/b]$

2- استنتج أنه اذا كان a وb من زوجية مختلفة فان: $a\wedge b=1\Rightarrow(a-b)\wedge(a+b)=1$

3- حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة $\begin{cases}\alpha\beta=3^5\times5^{13}\\ \alpha\wedge\beta=1\\ 1\prec\alpha\prec\beta\end{cases}$

4- استنتج حلول النظمة $\begin{cases}x^2-y^2=3^5\times5^{13}\\ x\wedge y=1\end{cases}$ $(x;y)\in\mathbb{N}^2$

تمرين29

لتكن $(x;y;z)\in\mathbb{N}^{*3}$ بحيث $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$

1- حدد x وy اذا كان $z=1$

2- نفترض أن $z\neq1$ و $x\wedge y\wedge z=1$

أ- بين أن $(y-z)\wedge(x-z)=1$ (لاحظ أن $(y-z)(x-z)=z^2$)

ب- استنتج أنه يوجد a وb من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ بحيث $a\wedge b=1$ و $y-z=b^2$ و $x-z=a^2$ و $z=ab$

3- بين أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية α و β و d بحيث:

$x=\alpha(\alpha+\beta)d$ و $y=\beta(\alpha+\beta)d$ و $z=d\alpha\beta$ و $\alpha\wedge\beta=1$

4- حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20}$

تمرين30

نعتبر المعادلة $x^2+y^2+xy-13x=0$ $(x;y)\in\mathbb{N}^{*2}$ (E)

نضع $x=ad$; $y=bd$; $d=x\wedge y$

1- بين أن a/d

2- نضع $d=ac$ حيث $c\in\mathbb{N}^*$

أ- بين أن $c(a^2+b^2+ab)=13$

ب- استنتج أن $c=1$

3- حل المعادلة (E)

تمرين31 (دورة فبراير 1998)

نعتبر النظمة (S) $\begin{cases}x\equiv5\quad[7]\\ x\equiv1\quad[4]\end{cases}$ $x\in\mathbb{Z}$

1- حل المعادلة (E): $7u+4v=1 \qquad (u;v)\in\mathbb{Z}^2$

2- ليكن $(u_0;v_0)$ حلا للمعادلة (E) و x_0 حيث $x_0=7u_0+4v_0$

بين أن العدد x_0 حل للنظمة (S) من أجل كل حل $(u_0;v_0)$ للمعادلة (E).

3- حل النظمة $\begin{cases} x\equiv 0 & [7] \\ x\equiv 0 & [4] \end{cases} \qquad x\in\mathbb{Z}$

4- استنتج حلول النظمة (S)

تمرين32(دورة فبراير 1999)

1- ليكن $(m;n)\in\mathbb{N}^{*2}$ حيث $m\wedge n=1$

أ- بين أن $2m^2+n^2\not\equiv 0 \quad [5]$

ب- استنتج أن $(2m^2+n^2)\wedge 5=1$

2- نعتبر المعادلة (E): $2x^3+x+1=0 \quad x\notin\mathbb{R}$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α حيث $1\prec\alpha\prec 2$

ب- نفترض أن $\alpha=\dfrac{m}{n}$ حيث $(m;n)\in\mathbb{N}^{*2}$ حيث $m\wedge n=1$

a- تحقق أن $(2m^2+n^2)m=5n^3$

b- بين أن $m=5$

c- استنتج أن العدد α ليس جذريا.

تمرين33(دورة استدراكية فبراير 1996)

I- $\alpha_1 \;;\; \alpha_2 \;;\; \alpha_3.........\alpha_k$ أعداد صحيحة طبيعية

نضع $\prod_{i=1}^{i=k}(1+\alpha_i)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)........(1+\alpha_k)$

بين أن $\left(\prod_{i=1}^{i=k}(1+\alpha_i)\in 2\cdot\mathbb{N}\right)\Leftrightarrow\left(\exists i\in\{1;2....k\}/\alpha_i\in 2\cdot\mathbb{N}\right)$

II- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

$d(n)$ يرمز لعدد القوا سم الصحيحة الطبيعية للعدد n

$\pi(n)$ يرمز جداء القوا سم الصحيحة الطبيعية للعدد n

1- حدد $d(n)$ و $\pi(n)$ في كل من الحالتين $n=14 \;;\; n=81$

2- أ- نفترض أن $d(n)$ عدد زوجي

بين أن $\pi(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}$

ب- نفترض أن $d(n)$ عددفردي

بين أن $q\cdot n^{\frac{d(n)-1}{2}}=\pi(n)$ حيث $q^2=n$

ج- تحقق أن $(\pi(n))^2=n^{d(n)} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

3- حدد عددا صحيحا طبيعيا n حيث $\pi(n)=12^{15}$

تمرين34(دورة فبراير 1996)

نعتبر الحدودية $p(x)=16x^3-20x^2-8x+3$

ليكن $m\in\mathbb{Z}^* \;;\; n\in\mathbb{N}^*$ حيث $m\wedge n=1 \;;\; p\left(\dfrac{m}{n}\right)=0$

1- بين أن m يقسم 3 و n يقسم 16

2- ليكن $a\in\mathbb{Z}$
أ- حدد حدودية $Q(x)$ بحيث $p(x)-p(a)=(x-a)Q(x)$
ب- تحقق من أن $n^2\cdot Q\left(\frac{m}{n}\right)\in\mathbb{Z}$
ج- بين أن $(m-an)\wedge n=1$
3- استنتج من السؤال(2) أن $(m-an)$ يقسم $p(a)$
4- أ- أحسب $p(a)$ من أجل $a=1$ ثم من أجل $a=-1$
ب- باستعمال السؤالين (1) و (3) أعط كل الجلو ل الجذرية للمعادلة $p(x)=0$

تمرين35
ليكن $n\in\mathbb{N}$
1- أ- حدد بواقي قسمة للأعداد 2 و 2^2 و 2^3 ....و2^n
ب- بين أن $2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right)-1\equiv 0\quad[9]$

2- حدد حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية لـ 4^n على 7
3- حدد حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية لـ $A=851^{3n}+851^{2n}+851^{n}+2$ على 7

تمرين36
ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
بين أن إذا كان a^n-b^n عددا أوليا فان n عدد أولي

تمرين37
ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $A_n=\frac{n(n+1)}{2}$ و $B_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ و $C_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

1- بين أن A_n و B_n و C_n تنتمي الى $\mathbb{N}^*$
2- أحسب $A_n\wedge B_n$ (يمكن استعمال الموافقة بترديد3)
3- نضع $D_n=C_n\wedge C_{n-1}$
أ- أحسب D_n(يمكن استعمال الموافقة بترديد2)
ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
بين أن C_n وC_{n+1} وC_{n+2} أولية فيما بينها.

تمرين38
لكل عددين صحيحين نسبيين u و v نرمز بـ$\Delta(u;v)$ للقاسم المشترك الأكبر للعددين u و v
1- بين إذا كان $\Delta(u;v)=1$ فان $\Delta\left(u^2+v^2;v\right)=1$ و$\Delta\left(u^2+v^2;u\right)=1$ و $\Delta\left(u^2+v^2;uv\right)=1$

2-نعتبر في $\left(\mathbb{Z}^*\right)^3$ المعادلة (E) : $\left(x^2+y^2\right)z=26xy$

أ- بين إذا كان $\Delta(x;y)=1$ فانه يوجد عدد صحيح نسبي t حيث $\left(x^2+y^2\right)t=26$
ب- أوجد جميع المثلوثات $(x;y;z)$ حلول المعادلة (E) حيث $\Delta(x;y)=1$
ج- استنتج مجموعة المثلوثات $(x;y;z)$ حلول المعادلة (E).

تمرين39(مبرهنة chinois)
لتكن $(a;b;m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$
نعتبر النظمة $(S)\quad x\in\mathbb{Z}:\begin{cases}x\equiv a & [n]\\ x\equiv b & [m]\end{cases}$
لتكن S مجموعة حلول النظمة
1- بين أن $S\neq\varnothing\Leftrightarrow m\wedge n/b-a$

2- ليكن x_0 من S بين أن $S=\{x_0+(mvn)k/k\in\mathbb{Z}\}$

3- حل في $\mathbb{Z}$ النظمتين $\begin{cases} x\equiv 5 & [25] \\ x\equiv 3 & [20] \end{cases} x\in\mathbb{Z}: \quad (S_1)$ و $\begin{cases} x\equiv 2 & [3] \\ x\equiv 1 & [2] \end{cases} x\in\mathbb{Z}: \quad (S_2)$

تمرين40

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=0$; $u_1=1$; $u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

a. حدد u_n بدلالة n

b. بين أن $u_n\wedge u_{n+1}=2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

c. لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $S_n=1+3+3^2+.....+3^{n-1}$

بين أن $S_n\wedge S_{n+1}=1$

4- بين أن $u_{n+p}=(u_p+1)u_n+u_p \quad \forall(n;p)\in\mathbb{N}^{*2}$

استنتج أن $u_n\wedge u_{n+p}=u_n\wedge u_p$

5- ليكن $(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $a\succ b$ و r باقي القسمة الاقليدية للعدد a على b

أ- بين أن $u_a\wedge u_b=u_b\wedge u_r$

ب- استنتج أن $u_a\wedge u_b=u_{(a\wedge b)}$

تمرين41

1- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 4^6-1 و 4^5-1

2- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $\begin{cases} u_0=0\,,\,u_1=1 \\ u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

أ- أحسب u_2 و u_3 و u_4

ب- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n : $u_{n+1}=4u_n+1$

ت- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n، u_n عدد صحيح طبيعي

ث- استنتج لكل عدد صحيح طبيعي n، القاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و u_{n+1}

3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n

ت- حدد لكل عدد صحيح طبيعي n، القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^{n+1}-1$ و 4^n-1