

النهايات و الاتصال

جدول للنهايات

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية $f \times g$	نهاية $f + g$	نهاية g	نهاية f
$(l' \neq 0) \frac{l}{l'}$	$l \times l'$	$l + l'$	l'	l
0	∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	$+\infty$	$l \neq 0 \quad l$
0	∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	$-\infty$	$l \neq 0 \quad l$
∞ مع وضع إشارة l	0	l	0^+	$l \neq 0$ حيث l
∞ مع وضع عكس إشارة l	0	l	0^-	$l \neq 0$ حيث l
شكل غير محدد	0	0	0	0
0	شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	0
0	شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	$l \neq 0$ حيث l	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	$l \neq 0$ حيث l	$-\infty$

نهاية \sqrt{f}	نهاية f
\sqrt{l}	$l \geq 0$
$+\infty$	$+\infty$

تمارين

تمرين 1

بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left| x \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2}$

تمرين 2

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 12}{x + 2} ; \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 - 3x} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x}{x + 2} ; \lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 - 6x - 1 \text{ حدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{2x^2 - x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$$

تمرين 3

أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$x_0 = 1 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{ب-} \quad x_0 = 2 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{-4+x^2}{x-2} & x > 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2+12} & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{أ-}$$

تمرين 4

أحسب a و b و c لكي تكون f متصلة في 3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-3} & x > 3 \\ f(x) = \frac{-4 + cx^2}{x-2} & x < 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

تمرين 5

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أدرس اتصالها على D_f في الحالات التالية

$$\begin{aligned} \text{أ-} \quad f(x) &= 2x^2 - 3x + 6 & \text{ب-} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 3x - 4} & \text{ج-} \quad f(x) &= \sqrt{x^2 - 3x} \\ \text{د-} \quad f(x) &= \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x}{x+1} & \text{ذ-} \quad f(x) &= \frac{3x+1}{\sqrt{x-3}} & \text{ر-} \quad f(x) &= x^2 + \sin(x) \\ \text{ز-} \quad f(x) &= 3x^2 - 1 + \tan(x) \end{aligned}$$

تمرين 6

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$\text{أ-} \quad x_0 = 1 ; f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} \quad \text{ب-} \quad x_0 = 0 ; f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

تمرين 7

$$\begin{aligned} \text{حدد} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 5x - \sin x} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{x + \frac{\pi}{4}} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x} \\ & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x + \sin 3x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} \\ & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\sin x} \end{aligned}$$

تمرين 8

$$\begin{aligned} \text{حدد} \quad & \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{|x-2|} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x-1}} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 6} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 6} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x}{x-3} \end{aligned}$$

تمرين 9

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sin(x-1)}{x^2-x} & x > 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{|2x-1|-1} & x < 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة بـ

هل يمكن تمديد f بالاتصال في النقطة 1

تمرين 10

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

نعتبر f دالة المعرفة بـ

أدرس اتصال f في 1

تمرين 11

حدد

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^6 - 2x}{x+2} ; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 5x}{-6x^4 - 2x} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 5x^3 - 3x ; \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -4x^2 - 6x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x+1}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + x$$

$$(x = \frac{1}{t} \text{ نضع}) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x + 2x$$

تمرين 12

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايات عند محددات D_f

أ- $f(x) = 2x^2 - 3x$ ب- $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 4}$

ج- $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ د- $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 5x + 6}$

تمرين 13

أحسب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 - 3x - 10} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x - 2}}{x^2 - x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} + x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 + \sin^2 x}}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x^2 - x)}{x^2}$$

تمرين 14

نعتبر $f(x) = \frac{\sqrt{5 - \cos x} - 2}{x^2}$

1- بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال و حدده.

2- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$