

# الحساب المثلثي

السنة الأولى سلك بكالوريا عر

## تمرين 1

1 - حدد الأضلاع المنحني الرئيسي المرتبط بالأضلاع المنحنيين التاليين  $\frac{789\pi}{7}$  ;  $\frac{-214\pi}{5}$

2- ضع على الدائرة المثلثية النقط  $M$  التي أضلاعها المنحني  $\frac{5\pi}{4} + k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$

3- ضع على الدائرة المثلثية النقط  $M$  التي أضلاعها المنحني حيث  $x \in [2\pi]$   $3x \equiv \frac{\pi}{4}$

4- أنشئ مثلثا  $ABC$  متساوي الأضلاع حيث  $\left(\widehat{AB;AC}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}$   $[2\pi]$

## تمرين 2

1- حدد

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = 1 + \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \dots + \sin \frac{13\pi}{7}$$

2- بسط  $\cos^6 x + \sin^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x$

## تمرين 3

في مثلث  $ABC$  نضع  $BC = a$  ;  $AC = b$  ;  $AB = c$  و  $p = \frac{a+b+c}{2}$  و  $S$  مساحة المثلث  $ABC$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2} \quad \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{1- بين أن}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{4s}{b^2 + c^2 - a^2} \quad \text{2- بين أن}$$

## تمرين 4

لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أطوال أضلاع مثلث

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad a^2 < \frac{b^2}{\cos^2 x} + \frac{c^2}{\sin^2 x} \quad \text{بين أن}$$

## تمرين 5

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{1- حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \text{2- حل في } [-\pi; 2\pi] \text{ مثل حلول المعادلة على الدائرة المثلثية}$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{3- حل في } ]-\pi; \pi]$$

4- حل في  $\mathbb{R}$  و مثل حلول المعادلة على الدائرة المثلثية التالية  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

5- حل في  $[-2\pi; 2\pi]$   $\sin x + \cos x = 2$

### تمرين 6

1- بين أن إذا كان  $|a| \leq 1$  و  $|b| \leq 1$  فإن  $(a = 1 \text{ et } b = -1)$  ou  $(a = -1 \text{ et } b = -1)$   $ab = 1 \Leftrightarrow$

2- حل في  $[0; \pi]$   $\sin 2x \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

### تمرين 7

حل في  $\mathbb{R}$  و مثل حلول المعادلات على الدائرة المثلثية التالية

$$\sin \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$2 \cos^2 2x - 7 \cos 2x + 3 = 0$$

### تمرين 8

حل المتراجحات

$$x \in ]-\pi; \pi] \quad \sin 3x < \frac{-1}{2}$$

$$x \in [0; 3\pi] \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \in [-\pi; 0] \quad \tan \frac{x}{3} \geq \sqrt{3}$$

### تمرين 9

$$\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad \text{أدرس إشارتي } \tan x - \sqrt{3} \text{ و } \tan x - 1 \text{ في}$$

$$x \in \left] \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right[ \quad \tan x + \sqrt{3} \cot ax < 1 + \sqrt{3} \quad \text{استنتج حلول المتراجحة}$$

### تمرين 10

$$p(x) = 4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{6} \quad \text{نعتبر}$$

1- حل في  $]0; 2\pi]$  المعادلة  $p(x) = 0$

2- أ- عمل  $p(x)$

ب- حل في  $]0; 2\pi]$  المتراجحة  $p(x) < 0$

## تمرين 11

$$\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(4 \cos x \sin x + 1) \quad \text{بين أن}$$

$$\cos^2 \frac{5}{2}x - \cos^2 \frac{3}{2}x = (-\sin 4x) \sin x$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\tan x - \tan y = \frac{2 \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$$

$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y) \cdot \sin(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

## تمرين 12

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3) \quad \text{-1 (أ) بين أن}$$

$$\text{ب) استنتج } \cos \frac{\pi}{10} \text{ و } \sin \frac{\pi}{10}$$

$$\text{-2 (أ) حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } \cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) بين أن } \cos \frac{\pi}{9} \text{ و } \cos \frac{7\pi}{9} \text{ و } \cos \frac{13\pi}{9} \text{ حلول للمعادلة } 8X^3 - 6X - 1 = 0$$

ج) استنتج قيم

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{13\pi}{9}$$

$$B = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9}$$

$$C = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9}$$

## تمرين 13

$$\text{ليكن } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ أعداد حقيقية حيث } x + y + z = \pi$$

بين أن

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = -2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \quad \text{أ-}$$

$$\text{ب- } \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \quad \text{حيث } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ تخالف } \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ج- } \frac{\cos x}{\sin y \sin z} + \frac{\cos y}{\sin x \sin z} + \frac{\cos z}{\sin y \sin x} = 2 \quad \text{حيث } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ تخالف } k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

## تمرين 14

$$\text{-1 أ- أحسب } \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{ب- بين أن } 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = 4 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7}$$

ج- استنتج قيمة  $1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

2- بين أن  $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = 2^{-4}$

### تمرين 15

نعتبر في  $\mathbb{R}$  المعادلة (E) :  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 9x = 0$

1- بين أن  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 9x = 4 \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 4x$

2- استنتج حلول المعادلة (E)

### تمرين 16

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين بحيث  $\cos x + \cos y = a$  و  $\sin x + \sin y = b$  و  $a^2 + b^2 = 1$

1- بين أن  $\cos(x - y) = -\frac{1}{2}$

2- بين أن  $\sin(x + y) = 2ab$

### تمرين 17

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

بين أن  $\tan(a + b) \leq \frac{\tan 2a + \tan 2b}{2}$

### تمرين 18

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\sin 2x = \tan x \quad ; \quad \tan x \cdot \tan 4x = -1$$

$$\cos x + \sin x = 1$$

$$\sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\cos 2x + \cos x - 2 = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

$$\cos x + \sin x + \tan x - \frac{1}{\cos x} = 0$$