الجداء السلمي و تطبيقاته

تمرين1

ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$

أتبث أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(AB^2-AC^2\right)$

تمرين2

نعتبر $ABCD$ رباعيا و I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[BD]$.

بين أن $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

تمرين3

ليكن ABC مثلثا و O مركز الدائرة المحيطة به و I منتصف $[BC]$ ، و A' مماثلة A بالنسبة للنقطة O.

1- أتبث أن $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA'}=0$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA'}=0$

2- استنتج أن $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$; $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2$

3- أحسب $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AI}$ بدلالة AB و AC

4- أتبث أن $AI^2+A'I^2=4OA^2-\frac{1}{2}BC^2$

5- حدد (Δ) مجموعة النقط M من المستوى حيث $OM^2-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=OA^2$

تمرين4

ليكن ABC مثلثا و (Δ) مجموعة النقط M من المستوى حيث $AC\times\left(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=AB\times\left(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$.

نعتبر I موقع المنصف الداخلي لـ $\left[\widehat{BAC}\right]$

1- بين أن $(AI)\subset(\Delta)$

2- استنتج أن $(AI)=(\Delta)$

تمرين5

ليكن ABC مثلثا

1- حدد مجموعة النقط M من المستوى حيث $MA^2-MB^2=AB^2-AC^2$

1- حدد مجموعة النقط M من المستوى حيث $AM^2-\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=AB^2$

تمرين6

ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع

1- بين أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2}{2}$

حدد مجموعة النقط M من المستوى حيث $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=MA^2$

3- حدد مجموعة النقط M من المستوى حيث $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{AB^2}{2}$

4- نعتبر (Δ) مجموعة النقط M من المستوى حيث $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

أ- حدد D نقطة تقاطع (Δ) و (BC)

ب- بين أن $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ $\forall M\in(P)$

د- استنتج طبيعة (Δ)

تمرين7

نعتبر $ABCD$ رباعيا محدبا حيث $(AB)\not\parallel(CD)$ و I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[BD]$ و (Δ)

مجموعة النقط M من المستوى حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$

1- بين أن $MI^2 - MJ^2 = IA^2 - JB^2 \Leftrightarrow M \in (\Delta)$
2- بين أن (Δ) مستقيم عمودي على (IJ) في نقطة E يجيب تحديدها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين
1- حدد (C) مجموعة النقط M حيث $MA = 2MB$
2- حدد (E) مجموعة النقط M حيث $MA^2 + MB^2 = AB^2$
3- حدد F مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2$

تمرين9

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و(C) مجموعة النقط M حيث $AM^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 6AB^2$
1- حدد I و J نقطتي تقاطع (AB) و(C)
2- بين أن $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = AM^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} - 6AB^2 \quad \forall M \in (\mathrm{P})$
3- استنتج طبيعة

تمرين10

لتكن A و B نقطتين مختلفتين و(C) مجموعة النقط M حيث $AM^2 + 2MB^2 - 3MA \times MB = 0$
1- بين أن $A \notin (C) \quad ; \quad B \notin (C)$
2- بين أن $\dfrac{MA}{MB}$ حل للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$
3- استنتج طبيعة (C).

تمرين11

ليكن ABC مثلثا و I و J و K نقط تنتمي على التوالي إلى $[BC]$ و$[CA]$ و $[AB]$ و (Δ_1) المستقيم العمودي على (BC) و المار من Iو (Δ_2) المستقيم العمودي على (AC) و المار من J و(Δ_3) المستقيم
العمودي على (BA) و المار من K
1- بين أن $(\Delta_1) = \left\{ M \in (P) / BM^2 - CM^2 = BI^2 - CI^2 \right\}$
2- استنتج أن المستقيمات (Δ_1) و (Δ_2) و(Δ_3) متلاقية إذا وفقط إذا كان
$$BI^2 - CI^2 + CJ^2 - AJ^2 + AK^2 - BK^2 = 0$$

تمرين12

ليكن ABC مثلثا و G مركز ثقله
1- بين أن $GA^2 = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{9}$
2- أحسب $(AC^2 - AB^2)GA^2 + (BA^2 - BC^2)GB^2 + (CB^2 - CA^2)GC^2$
3- حدد مجموعة النقط M حيث
$$(AC^2 - AB^2)MA^2 + (BA^2 - BC^2)MB^2 + (CB^2 - CA^2)MC^2 = 0$$

تمرين13

ليكن ABC مثلثا حيث $AB = AC = 2BC$ و G مرجح $(A;-1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$
1- حدد مجموعة النقط M حيث $MB^2 + MC^2 = MA^2$
2- أ- بين أن $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AG} \quad \forall M \in (P)$
ب استنتج مجموعة النقط M التي تحقق $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 8BC^2$