النهايات و الاتصال

I- النهاية المنتهية

1- النهاية ا عند x_0

أ- النهاية 0 عند 0

تمرين

نعتبر الدالتين f و g حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$

1- أ) مثل مبيانيا f

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0/ \quad f\left(]-\alpha;\alpha[-\{0\}\right)\subset]-\varepsilon;\varepsilon[$

ج) بين ذلك جبريا

2- 2- أ) مثل مبيانيا g

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0/ \quad g\left(]-\alpha;\alpha[-\{0\}\right)\subset]-\varepsilon;\varepsilon[$

ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

$g(x)$	$f(x)$	x
		-10^{-2}
		-10^{-5}
		-10^{-100}
//////////////////////	/////////////////////	0
		10^{-100}
		10^{-5}
		10^{-2}

ملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 0 يقترب $f(x)$ من 0، بل أكثر كلما كان x يؤول إلى 0 فان $f(x)$ يؤول إلى 0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0

نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

نفس الملاحظة على الدالة g

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0\prec |x| \prec \alpha \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$$

نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ملاحظة

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} |f(x)|=0$

* إذا كانت f و g منطبقتين على مجال مفتوح منقط مركزه0 و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ فان $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

خاصية

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \lim_{x\to0} ax^n=0\qquad \lim_{x\to0} a\sqrt{x}=0$$

خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه 0 بحيث $|f(x)|\le u(x)$ $\forall x\in I$ و كان $\lim_{x\to0} u(x)=0$ فان $\lim_{x\to0} f(x)=0$

البرهان

ليكن $\beta\succ0$ و $I=]-\beta;\beta[-\{0\}$

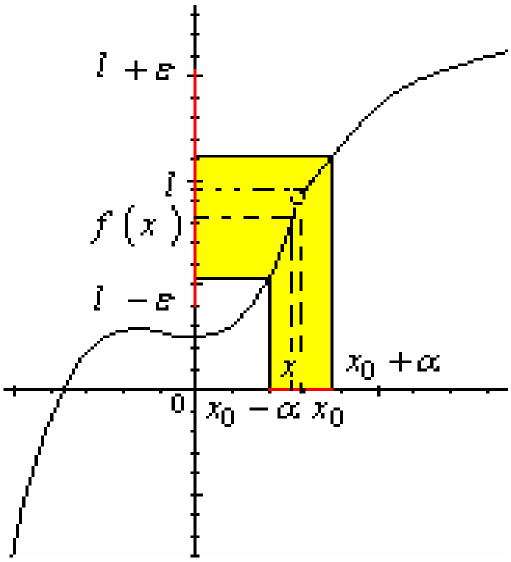
لدينا $|f(x)|\le u(x)\qquad \forall x\in]-\beta;\beta[-\{0\}$

و حيث أن $\lim_{x\to0} u(x)=0$ فان $\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists\alpha\succ0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow|u(x)|\prec\varepsilon$

نعتبر $\lambda=\inf(\alpha;\beta)$ $\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists\lambda\succ0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\lambda\Rightarrow\begin{cases}|u(x)|\prec\varepsilon\\|f(x)|\le u(x)\end{cases}$

و بالتالي $\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists\lambda\succ0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\lambda\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon$

إذن $\lim_{x\to0} f(x)=0$



تمرين

بين أن $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0\quad ;\quad \lim_{x\to0}\frac{x}{x+1}=0$

ب- النهاية l عند x_0

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0

حدسيا: $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤو ل x إلى x_0

عندما يقترب x من x_0 أي عندما تقترب h من 0

حيث $h=x-x_0$ فان $f(x)-l$ تقترب من 0

أي $f(x_0+h)-l$ تقترب من 0

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0

نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا كان نهاية الدالة $h\to f(x_0+h)-l$ هي0 عندما يؤول h إلى 0

نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

ملاحظة

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{h\to0} f(x_0+h)=l$

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)-l=0$

* إذا كانت لدالة نهاية عند x_0 فان هذه النهاية وحيدة

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)-l=0$

* $\lim_{x\to x_0} a(x-x_0)^n=0\qquad \forall a\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين بين أن $\lim_{x\to4}\frac{2x-1}{x-3}=9$

خاصية

اذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه x_0 بحيث $|f(x)-l| \le u(x)$ $\forall x \in I$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$
فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

تمرين

بين أن $\lim\limits_{x \to 0} 2 + x^2 \cos\frac{1}{x} = 2$

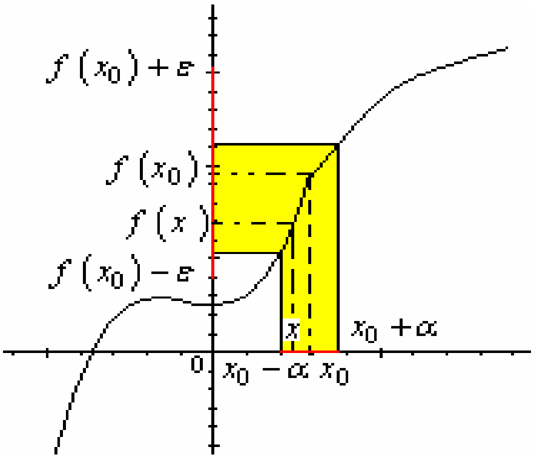
خاصية

إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

2- اتصال دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0
تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



أمثلة

الدوال $x \to ax^n$ متصلة في 0 $\left(n \in \mathbb{N}^* \quad a \in \mathbb{R}\right)$
الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها
الدالة $x \to \sqrt{|x|}$ متصلة في 0

اصطلاح

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و كانت غير متصلة في x_0 فإننا نقول إن f متقطعة في x_0

تمرين

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \ne 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

أدرس اتصال f في1

ب- خاصية

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}$

البرهان

لتكن P دالة حدودية و x_0 عنصر من $\mathbb{R}$
نعلم أنه توجد حدودية Q حيث $P(x) - P(x_0) = (x - x_0)Q(x)$
نفترض أن
$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $|Q(x)| \le |a_n||x^n| + |a_{n-1}||x^{n-1}| + ... + |a_1||x| + |a_0|$
ليكن M أكبر الأعداد $|a_i|$ حيث $i \in \{0;1...;n\}$ ومنه $|Q(x)| \le M(|x^n| + |x^{n-1}| + ... + |x| + 1)$
نفترض أن $x_0 - 1 \prec x \prec x_0 + 1$ و $\alpha = \sup(|x_0 - 1|;|x_0 + 1|)$ ومنه $|x| \prec \alpha$
و بالتالي $|Q(x)| \le M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + ... + \alpha + 1)$
نضع $k = M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + ... + \alpha + 1)$ ومنه $|x - x_0||Q(x)| \le k|x - x_0|$

وبالتالي $\left|P(x)-P(x_0)\right|\le k\left|x-x_0\right|$

و حيث أن $\lim_{x\to x_0} k\left|x-x_0\right|=0$ فان $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

إذن P متصلة في x_0

ج- تطبيقات على حساب النهايات

حدد $\lim_{x\to -1} 3x^2+4x-2$; $\lim_{x\to 2}\left|x^2-7x-2\right|$; $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}$; $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-4x^2-4x-5}{x-5}$

د- تمديد بالاتصال

الدالة $f: x\to \frac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة في 1

ولدينا $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2$

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x)=\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ g(1)=2 \end{cases}$ تنطبق على f في $\mathbb{R}-\{1\}$ ومتصلة في 1

نقول ان g تمديد بالاتصال لدالة f في 1

تعريف

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x)=f(x) & x\in D_f \\ g(x_0)=l \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد بالاتصال لدالة f في x_0

تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين

$\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2+2x-8}{x+2} \\ x_0=-2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} f(x)=x\sin\frac{1}{x^2} \\ x_0=0 \end{cases}$

3- النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ (أنشئ C_f)

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]1;+\infty[$ ينطبق مع قصور الدالة g حيث $g(x)=x+2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1} x+2=3$

نقول ان نهاية f هي 3 عل يمين 1

و نكتب $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=3$

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]-\infty;1[$ ينطبق مع قصور الدالة h حيث $h(x)=-x-2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1} -x-2=-3$

نقول ان نهاية f هي -3 على يسار 1

و نكتب $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=-3$

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$
نقول ان f تقبل النهاية l على يمين x_0 إذا كان قصورها على $]x_0;x_0+a[$ حيث $a\succ 0$ ينطبق مع قصور
دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 تكون نهايتها l عند x_0 و نكتب $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$
أو $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}} f(x)=l$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار

خاصية

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$$

تمرين

أدرس نهاية الدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+2|x|}{x} \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2+4x+4 & x\succ -2 \\ f(x)=2x^2+2x & x\le -2 \\ x_0=-2 \end{cases}$$

نتائج

تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$
تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$
تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان تكون f متصلة على يمين x_0 وعلى يسار x_0

تمرين

1- حدد a لكي تكون f متصلة في -1

$$\begin{cases} f(x)=x^3+ax & x\succ -1 \\ f(x)=-x+1 & x\le -1 \end{cases}$$

2- أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 & x\succ 2 \\ f(x)=x^2-1 & x\le 2 \end{cases} \quad ; \quad x_0=2$$

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x} & x\succ 0 \\ f(x)=x^2-x & x\le 0 \end{cases} \quad ; \quad x_0=0$$

4- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة معرفة على $[a;b]$
تكون f متصلة على $]a;b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$
تكون f متصلة على $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$ ومتصلة على يمين a و متصلة على يسار b

بالمثل نعرف الاتصال على $[a;b[$ و على $]a;b]$

ملاحظة

التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a;b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(a;f(a))$ و $(b;f(b))$

II- النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

1- النهاية 0 عند $+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{x}$

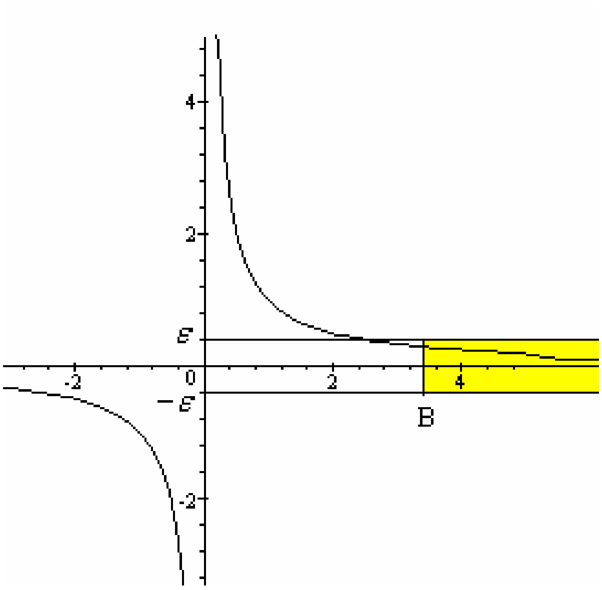
1- أرسم C_f

2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

x	10^{100}	10^{10^9}	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$				

3- بين أن

$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad f(]B;+\infty[) \subset]-\varepsilon;\varepsilon[$



-3

ليكن $\varepsilon \succ 0$

نبحث عن $B \succ 0$ حيث $x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

لدينا $\forall x \succ 0 \quad |f(x)| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} \prec \varepsilon \Leftrightarrow x \succ \frac{1}{\varepsilon}$

نأخذ $B=\frac{1}{\varepsilon}$

للحصول $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول x إلى $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان

$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$ نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

خاصيات

خاصية1

$$\forall (k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^* \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}=0$$

خاصية2

إذا وجد مجال على شكل $]a;+\infty[$ بحيث

$|f(x)|\le u(x)$ $\forall x\in]a;+\infty[$ وكان $\lim_{x\to+\infty} u(x)=0$ فان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

تمرين تطبيقي

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}$

$4x^2+3\succ x^2$ ومنه $\left|\frac{7}{4x^2+3}\right|\le\frac{7}{x^2}$ وحيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}=0$

2- النهاية l عند $+\infty$

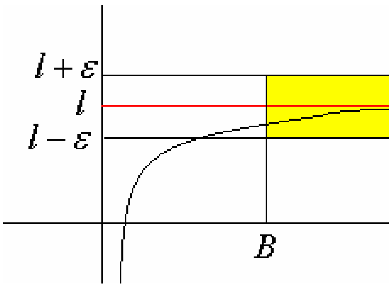
تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط

إذا كان $\forall\varepsilon\succ 0\quad \exists B\succ 0\quad x\succ B\Rightarrow |f(x)-l|\prec\varepsilon$

نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$



مثال

بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2+1}=1$

3- النهاية l عند $-\infty$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(-x)=l$

نكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$

ملاحظات

- إذا كانت f زوجية فان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)$
- إذا كانت f فردية فان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\lim_{x\to-\infty} f(x)$

III- النهايات المنتهية والترتيب

خاصيات

خاصية1

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و f موجبة على I فان $l\geq 0$

خاصية2

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ بحيث $l\neq 0$ فانه يوجد مجال مفتوح منقط J مركزه x_0 بحيث $\forall x\in J \quad f(x)\times l\succ 0$

خاصية3

f و g دا لتان معرفتان على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=l'$ و كان $f\geq g$ على I فان $l\geq l'$

خاصية4

f و g و h دوال معرفة عى مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=l$ وكان $f\geq h\geq g$ على I فان $\lim_{x\to x_0} h(x)=l$

IV- العمليات على النهايات المنتهية

f و g دالتان لكل منهما نهاية منتهية في x_0 و λ عدد حقيقي
الدوال $f+g$ و λf و $f\times g$ و $|f|$ لها نهاية منتهية في x_0

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\times\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ فان $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$

إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ فان $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

ملاحظة الخاصيات تبقى صالحة في $x_0=+\infty$ و $x_0=-\infty$

V- العمليات على الدوال المتصلة

خاصيات

-* مجموع دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
-* جداء دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
-* جداء دالة متصلة في x_0 في عدد حقيقي هي دالة متصلة في x_0
-* اذا كانتا f و g دا لتين متصلتين في x_0 وكان $g(x_0)\neq 0$ فان الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان في x_0
-* اذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0 ومتصلة في x_0 فان دالة $\sqrt{f}$ متصلة في x_0
-* اذا كانت f متصلة وكانت $x\to f(ax+b)$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 فان الدالة $x\to f(ax+b)$ متصلة في x_0

نتيجة

كل دالة جدرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير الدالة الجدرية هي خارج دالتين حدوديتين

تمارين

-1 حدد $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}$; $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$ $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+5x-2}$; $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

-2 أدرس اتصال الدوال

$f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x}$ $g(x)=x^2-1+\sqrt{x-2}$ $\begin{cases} h(x)=2x^2-x & x\succ 1 \\ h(x)=-x^2+2 & x\le 1 \end{cases}$ $t(x)=\frac{2x^2-3x}{|x|}$

VI - الدوال المثلثة

نقبل النتيجة $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

-1 **نهايات و اتصال الدوال** $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ و $x\to\tan x$

* لدينا $|\sin x|\le|x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و $\lim_{x\to 0}|x|=0$ ومنه $\lim_{x\to 0}\sin x=0$

إذن الدالة $x\to\sin x$ متصلة في 0 ومنه الدالة $x\to\sin(ax+b)$ متصلة في 0

*$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}1-2\sin^2\frac{x}{2}=1$

إذن $x\to\cos x$ متصلة في0

$\lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$

$x\to\tan x$ متصلة في 0

* ليكن $x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{h\to 0}\sin(x_0+h)$$
$$=\lim_{h\to 0}[\sin x_0\cos h+\sin h\cos x_0]$$
$$=\sin x_0\cos 0+\sin 0\cos x_0=\sin x_0$$

إذن دالة $x\to\sin x$ متصلة في x_0

خاصية

الدالتان $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ متصلتان في $\mathbb{R}$

الدالة $x\to\tan x$ متصلة في حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

نتائج

الدالتان $x\to\sin(ax+b)$ و $x\to\cos(ax+b)$ متصلتان في $\mathbb{R}$

الدالة $x\to\tan(ax+b)$ متصلة في حيز تعريفها

-2 **نهايات اعتيادية هامة**

نحدد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\sin x|}\le\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{|\tan x|}$ حيث $x\ne 0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{|\sin x|}{|\tan x|}$ أي أن $|\cos x|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1$

و حيث أن $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ و x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

*

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1 \quad *$$

خاصية

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

نتيجة

$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$

تمرين

حدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$ ؛ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ ، $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 4x+\sin 2x}$

VII- النهايات اللامنتهية

1- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند x_0

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{|x|}$

1- أنشئ C_f

2- أتمم الجدول التالي

x	10^{-100}	10^{-10^9}	$10^{-10^{12}}$	$10^{-10^{100}}$
$f(x)$				

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x\to0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ0)\quad(\exists\alpha\succ0)\quad(\forall x\in D_f)\quad 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\lim_{h\to0}f(x_0+h)=+\infty$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}-f(x)=+\infty$$

خاصية

ليكن $k\in\mathbb{R}^{+*}$ ؛ $n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to0}\frac{k}{\sqrt{|x|}}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{k}{|x^n|}=+\infty$$

2- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a;+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ 0)\quad(\exists B\succ 0)\quad \forall x\in D_f \quad x\succ B\Rightarrow f(x)\succ A$$

خاصية

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} -f(x)=+\infty$$

خاصية

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

النهايات والترتيب

* إذا كان لكل x من I , $f(x)\geq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* إذا كان لكل x من I , $f(x)\leq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ملاحظة الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I على التوالي بالمجالات $]a;+\infty[$ و $]-\infty;a[$ و $]x_0;x_0+\alpha[$ و $]x_0-\alpha;x_0[$ $(\alpha\succ 0)$

VIII- العمليات على النهايات اللامنتهية

تعتبر دالتين f و g.

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية $f+g$	نهاية g	نهاية f
$+\infty$	$+\infty$	l $l\neq 0$
$-\infty$	$-\infty$	l $l\neq 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$

ب- نهاية جداء

نهاية $f\times g$	نهاية g	نهاية f
∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	l $l\neq 0$
∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	l $l\neq 0$
شكل غير محدد	$+\infty$	0
شكل غير محدد	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية λf حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ يمكن اعتبار λf كجداء الدالة الثابتة $x\to\lambda$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية g	نهاية f
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
∞ مع وضع إشارة l	0^+	l حيث $l \neq 0$
∞ مع وضع عكس إشارة l	0^-	l حيث $l \neq 0$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$

د- نهاية $\sqrt{f}$

نهاية $\sqrt{f}$	نهاية f
$+\infty$	$+\infty$

IX- تطبيقات

1- دالة القوة الصحيحة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

- إذا كان n زوجي فان $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- إذا كان n فردي فان $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

نتيجة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots\dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

وحيث $\lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots\dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right] = 1$ فان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^5+3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty} -4x^5=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^7+7x^3-x+31=\lim_{x\to-\infty} -3x^7=+\infty$$

3- الدالة الجدرية

نهاية دالة جدرية عند ما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\quad;\quad\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\qquad\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\qquad\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-2}-x\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+3x}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}\quad;\quad\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-4}{x}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x+1}-4}$$