

عموميات حول الدوال

السنة الأولى سلك بالوريا عر

تمرين 1

حدد حيز تعريف الدوال العددية f و g و h و t حيث:

$$t(x) = \frac{\sqrt{[2x]-1}}{\sqrt{-x^2+x+6}} ; \quad h(x) = \frac{2}{[3x-2]} \quad g(x) = \frac{2x}{x^2-3|x|+1} ; \quad f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$$

تمرين 2

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

- 1- تأكد أن f دالة فردية.
- 2- أدرس رتابة f على كل من المجالين $[1; +\infty[$ و $[0; 1]$
- 3- بين أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند 1 .
- استنتج أن f تقبل قيمة دنيا نسبية عند -1 .

$$4- \text{ حدد } \inf_{x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]} (f(x)) ; \quad \sup_{x \in [2; 4]} (f(x))$$

تمرين 3

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{|x|+1}{x^2+1}$$

- 1- بين أن f زوجية.
- 2- أ- بين أن f محدودة على $[1; +\infty[$
ب- بين أن f مصغورة بالعدد 1 على $[-1; 0]$
- 3- أدرس رتابة f على كل من $[-1+\sqrt{2}; +\infty[$ و $[0; -1+\sqrt{2}]$ ثم أعط جدول تغيرات f على \mathbb{R}
استنتج مطاريف الدالة f .

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$ حيث a عدد حقيقي موجب قطعاً.

- 1- بين أن f دالة فردية.
- 2- أدرس رتابة f على كل من $[0; a]$ و $[a; +\infty[$
- 3- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2a}$

تمرين 5

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = \frac{-x+3}{x+2} ; f(x) = x^2 - 3x$$

1- ضع جدول تغيرات كل من f و g

2- حدد تقاطع C_g و C_f .

3- أنشئ C_g و C_f .

4- حل ميانيا المتراجحة $f(x) \geq g(x)$

تمرين 6

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = x^3 - 1 ; f(x) = \sqrt{x+2}$$

C_g و C_f المنحنيين الممثلين لـ f و g على التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- أنشئ C_g و C_f .

3- بين مبيانيا أن المعادلة $x^3 - \sqrt{x+2} - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

تمرين 7

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = -3x^2 - 2x + 1 ; f(x) = \frac{-3x+1}{2x+1}$$

1- أنشئ C_g و C_f .

2- أ- حدد مبيانيا

$$f\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}\right) ; f\left(\left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[\right) ; f\left(\left[\frac{-1}{2}; 1\right[\right)$$

$$g(\mathbb{R}^+) ; g(]-2; -1[) ; g\left(\left]-1; \frac{1}{3}\right[\right)$$

3- حدد جبريا $g(\mathbb{R}^+) ; f\left(\left[\frac{-1}{2}; 1\right[\right) ; g\left(\left]-1; \frac{1}{3}\right[\right)$

4- أدرس تغيرات $g \circ f$ على $D_{g \circ f}$

تمرين 8

بين مبيانيا أن المعادلة $2x^3 + 3x^2 + 6x - 2 = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in \left] \frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right[$

تمرين 9

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = x^2 - 2x \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = -x^2 + 4x - 3 & x \geq 1 \\ f(x) = \frac{2x-1}{2x-4} & x < 1 \end{cases}$$

1- حدد D_f

2- أعط جدول تغيرات لكل من الدالتين f و g

3- أنشئ C_f

4- حدد جبريا $f([1; +\infty[)$; $f(]-\infty; 1])$

5- حدد $g \circ f(x)$ لكل x من \mathbb{R}

6- باستعمال رتبة f و g أدرس رتبة $g \circ f$

تمرين 10

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{12-x}$$

1- بين أن $\forall x \in [0; 12] \quad f(12-x) = f(x)$

2- بين أن المستقيم $x = 6$: محور تماثل للمنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم

3- أدرس تغيرات الدالة f على $[0; 6]$ واستنتج تغيراتها على $[6; 12]$.

4- استنتج مقارنة لأعداد $\sqrt{2} + \sqrt{10}$ و $\sqrt{3} + 3$ و $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

تمرين 11

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

1- باستعمال مركبة دالتين أدرس رتبة f على كل من المجالين $]1; +\infty[$; $]0; 1[$

2- بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $]1; +\infty[$

3- ليكن g قصور الدالة f على $]1; +\infty[$ و h قصور الدالة f على المجال $]0; 1[$ ،

$$(أ) \quad \forall x \in]0; 1[\quad h(x) = -g\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ب) بين أن g تقابل من $]1; +\infty[$ نحو $]1; +\infty[$ ثم حدد الدالة العكسية g^{-1}

(ج) استنتج أن h تقابل من $]0; 1[$ نحو $]0; 1[$ ثم حدد الدالة العكسية h^{-1} بدلالة g^{-1}

تمرين 12

لتكن f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} وتحقق الخاصيتين

$$\exists T \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x) - i$$

-ii f تزايدية

1- بين أن $\forall x \in [-\pi; \pi] \quad f(x) = f(0)$

2- بين أن $\forall (n; x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad f(x + nT) = f(x)$

3- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{Z} \quad x \in [n_0T; (n_0+1)T[$

4- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0)$

تمرين 13

لتكن f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^3 + x^2 + x$

1- أ- بين أن $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0$

ب- بين أن الدالة f تزايدية على \mathbb{R}

$$g(x) = \frac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

2- نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي

ا- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

ب- استنتج تغيرات الدالة g على \mathbb{R}_+^*

تمرين 14

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

1- حدد D_f

2- أدرس تغيرات f على كل من المجالات $[1; +\infty[$ و $]-1; 1[$ و $]-\infty; -1[$ (باستعمال مركبة دالتين)

3- ليكن g قصور الدالة f على $[1; +\infty[$

أ- حدد $g([1; +\infty[)$

ب- بين أن g تقابل من $[1; +\infty[$ نحو $[0; 1[$ وحدد تقابله العكسي

تمرين 15

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-\pi; \pi[$ بـ $f(x) = \cos x$

1- أدرس تغيرات f

2- ليكن g قصور الدالة f على $[0; \pi]$

أ- حدد $g([0; \pi])$

ب- بين أن g تقابل من $[0; \pi]$ نحو $[-1; 1]$

3- نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = 2 \cos^2 x - 2 \cos x$

أ- حل المتراجحة $\cos x \geq \frac{1}{2}$ $x \in]-\pi; \pi]$

ب- أدرس تغيرات الدالة h

تمرين 16

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x) = 2[x] - x$

1- ليكن n من \mathbb{Z} ، حدد $f(x)$ على $[n; n+1[$

2- أنشئ جزء المنحنى على $[0; 3[$

3- حدد $I = f([0; 3[)$

4- بين أن f تقابل من $[0; 3[$ نحو I ، ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x \in I$

تمرين 17

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بما يلي

$$g(x) = x^2 - x \quad ; \quad f(x) = \frac{x-2}{2x+1}$$

1- أعط جدول تغيرات f و g

2- أنشئ منحنى الدالتين f و g في نفس المعلم المتعامد الممنظم

3- تأكد أن $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{2} \right\} \quad 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

4- بين أن المعادلة $2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي الى $\left] \frac{-5}{4}; \frac{-9}{8} \right[$

5- نعتبر الدالة حيث $h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$

أدرس تغيرات h باستعمال مركبة دالتين

تمرين 18

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بما يلي $f(x) = \frac{1}{x+1} \sqrt{x^2 - 1}$

1- حدد D_f

2- نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = [f(x)]^2$

أ- أعط جدول تغيرات g

ب- أستنتج تغيرات f على كل من $]-\infty; -1[$ و $]1; +\infty[$

3- بين جبريا أن $f(]1; +\infty[) =]0; 1[$

4- ليكن h قصور الدالة f على $]1; +\infty[$.

بين أن h تقابل من $]1; +\infty[$ نحو $]0; 1[$ و حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من $]0; 1[$