النظمـــــات

I- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- أنشطة

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ المعادلة $3x-2y+1=0$

هل الأزواج $(1;2)$ و $(2;-1)$ و $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة

لتكن S مجموعة الحلول

<u>الطريقة1</u> نضع $x=a$ ومنه $y=\frac{3a+1}{2}$ إذن $S=\left\{\left(a;\frac{3a+1}{2}\right)/a\in\mathbb{R}\right\}$

يمكن أن نضع $y=b$ ومنه $x=\frac{2b-1}{3}$ إذن $S=\left\{\left(\frac{2b-1}{3};b\right)/b\in\mathbb{R}\right\}$

<u>الطريقة 2</u> نعتبر المستقيم $(D):3x-2y+1=0$

(D) مار من $A(1;2)$ و موجه بـ$\vec{u}(3;2)$

ومنه تمثيل بارامتري لـ(D) هو $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+3t\end{cases}t\in\mathbb{R}$

إذن $S=\{(1+2t;2+3t)/t\in\mathbb{R}\}$

2- تعريف

كل معادلة على شكل $ax+by+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى
بمجهولين حل المعادلة $ax+by+c=0$ هو إيجاد جميع الأزواج التي تحققها

3- صفة عامة

نحل المعادلة $ax+by+c=0$

* إذا كان $a=b=0$ فانه لينا حالتان

- إذا كان $c=0$ فان $S=\mathbb{R}^2$
- إذا كان $c\neq 0$ فان $S=\varnothing$

* إذا كان $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ فانه لدينا الحالات التالية

- إذا كان $a\neq 0$ و $b=0$ فان $S=\left\{\left(\frac{-c}{a};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$
- إذا كان $a=0$ و $b\neq 0$ فان $S=\left\{\left(x;\frac{-c}{b}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$
- إذا كان $a\neq 0$ و $b\neq 0$ فان $\vec{u}(-b;a)$ موجهة للمستقيم $(\Delta):ax+by+c=0$ المار من $A\left(0;\frac{-c}{b}\right)$

إذن $\begin{cases}x=-bt\\ y=\frac{-c}{b}+at\end{cases}t\in\mathbb{R}$

ومنه $S=\left\{\left(-bt;\frac{-c}{b}+at\right)/t\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات $2x+y-1=0$

$2y+4=0$; $3x-1=0$

II - النظمات

1- أنشطة

أ- بين أن النظمة $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=-2 \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظمة بطريقتين مختلفتين (التعويضية و التألفية الخطية)

ب- بين أن النظمة $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ \frac{-2}{3}x+y=-2 \end{cases}$ لا تقبل حلا

2- دراسة نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

a) دراسة عامة

لنحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$

في مستوى منسوب إلى معلم نعتبر $(D):ax+by-c=0$ و $(D'):a'x+b'y-c'=0$

دراسة النظمة يرجع لدراسة الأوضاع النسبية للمستقيمين (D) و (D')

و نعلم أن هذا يتوقف على العدد $ab'-a'b$

العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة نرمز له ب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

* إذا كان $ab'-a'b\neq 0$ فان (D') و (D) متقاطعان في نقطة وحيدة .

إذن النظمة تقبل حلا وحيدا

* إذا كان $ab'-a'b=0$ فان (D') و (D) متوازيان

- إما أن يكونا (D') و (D) منطبقان فان مجموعة حلول النظمة هي مجموعة حلول العادلة $ax+by=c$
- إما أن يكونا (D') و (D) منفصلان فان مجموعة حلول النظمة فارغة.

خاصة وتعريف

* للنظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ حل وحيد إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b\neq 0$

* للنظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ ما لانهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b=0$

العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة يكتب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ نرمز له بـ Δ

b) نظمة كرامر

لنحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ حيث $\Delta=ab'-a'b\neq 0$

$$x=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \quad ; \quad y=\frac{ac'-a'c}{\Delta}$$

تعريف و خاصة

عندما تكون محددة النظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ غير منعدمة نسمي هذه النظمة نظمة كرامر

و في هذه الحالة لدينا $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$; $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}$ حيث $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} 2\sqrt{3}x-y=2 \\ 3x+\sqrt{3}y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=2 \\ x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ -3x-\frac{3}{2}y=3 \end{cases}$

3- نظمات تالفية أخرى

أ- نظمة ثلاث معادلات بمجهولين

حل في $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ x+2y=-4 \\ 3x-4y=-2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$$

ب- نظمة معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

حل في $\mathbb{R}^3$

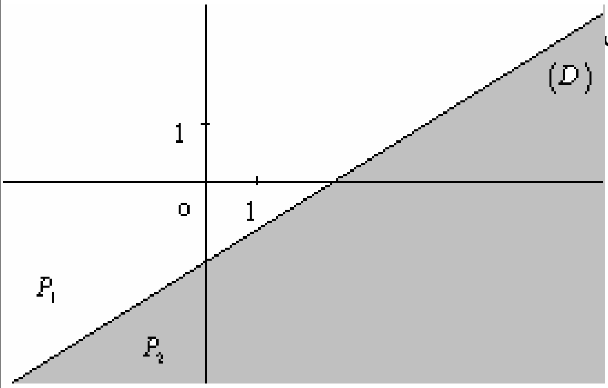
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+2z=5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

III- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- إشارة $ax+by+c$

خاصية

كل مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ يحدد في المستوى نصفي مستوى مفتوحين P_1 و P_2 (لايتضمنان (D))
أحدهما هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c\prec 0$
و الأخرهو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c\succ 0$



ملاحظة

لتحديد إشارة $ax+by+c$ يكفي تحديدها من أجل زوج $(x_0;y_0)$ إحداثيتي نقطة A من المستوى لا تنتمي إلى (D) نصف المستوى الذي يحتوي على A و حافته (D) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تكون فيه إشارة $ax+by+c$ هي إشارة ax_0+by_0+c. و نصف المستوى الآخر هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي كون فيه إشارة $ax+by+c$ هي عكس إشارة ax_0+by_0+c

أمثلة

أدرس في $\mathbb{R}^2$ إشارة كل من $-2x+3y-2$ و $2y-1\succ$

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ مبيانيا

$$\begin{cases} 2x+y\prec 0 \\ 3x+y\leq 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 3x+y\prec 0 \\ x-y+4\succ 0 \\ 2x+5y+8\succ 0 \end{cases}$$

2- البرمجة الخطية

تمرين

يصنع صانع منتوجين A و B بواسطة مواد أولية M_1 و M_2 و M_3 .
يتطلب صنع وحدة من المنتوج A: 1 كيلو من M_1 و 3 كيلو من M_2 و3 كيلو من M_3 .
يتطلب صنع وحدة من المنتوج B: 2 كيلو من M_1 و 2 كيلو من M_2 و كيلو واحد من M_3 .
المواد المتوفرة في اليوم الواحد هو 2 0 كيلو من M_1 و 30 كيلو من M_2 و27 كيلو من M_3.
إذا علمت أن بيع وحدة من نوع A يحقق ربحا قدره 40 درهما و بيع وحدة من نوع B يحقق ربحا قدره 20 درهما. فما هو عدد وحدات منتوج A و عدد وحدات منتوج B اللذانيحققان أكبر ربح؟

لتكن x عدد وحدات منتوج A و y عدد وحدات منتوج B
لإنتاج A و B يتطلب $(x+2y)Kg$ من M_1 حيث $x+2y \prec 20$ و $(3x+2y)Kg$ من M_2 حيث $3x+2y \prec 30$ و $(3x+y)Kg$ من M_3 حيث $3x+y \prec 27$
الزوج $(x;y)$ الذي يمثل إنتاج ينتمي إلى مجموعة حلول

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+2y-20 \prec 0 \\ 3x+2y-30 \prec 0 \\ 3x+y-27 \prec 0 \end{cases}$$

الربح هو $40x+20y$
نعتبر $(\Delta_0): 40x+20y=0$ و $(\Delta_b): 40x+20y=b$ حيث b ربح عند إنتاج x وحدة من منتوج A و y عدد وحدة من منتوج B و حيث (Δ_b) يحتوي على الأقل على نقطة من الجزء الملون
b تأخذ أكبر قيمة عند زوج إحداثيتي تقاطع المستقيمين ذا المعادلتين $3x+y=27$; $3x+2y=30$

$$\begin{cases} 3x+2y=30 \\ 3x+y=27 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(8;3)$$

الربح القصوي هو $40\times 8+20\times 3=380DH$