الجداء السلمي

1- أنشطة

نعتبر O و A و B ثلاث نقط من المستوى مختلفة

ليكن K المسقط العمودي لـ A على (OB) و H المسقط العمودي لـ B على (OA).

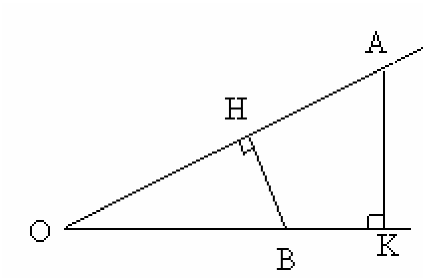
ليكن θ قياس $[\widehat{AOB}]$ بالراديان.

نعتبر أن كل من المستقيمين (OA) و (OB) مزودا بمعلم أصله O باختيار نفس الوحدة على المحورين.

الوضعية1

O و A و B نقط غير مستقيمية

الحالة1 $[\widehat{AOB}]$ زاوية حادة $0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$



$$\cos\theta = \frac{OK}{OA} = \frac{OH}{OB}$$

ومنه $OK = OA\cos\theta \quad ; \quad OA \times OH = OB \times OK$

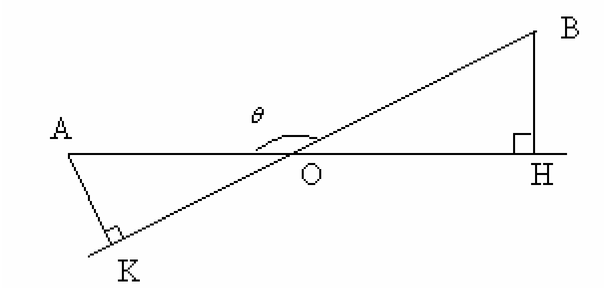
$$OA \times OH = OB \times OK = OB \times OA\cos\theta$$

$\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OH}$ لهما نفس المنحى ومنه $\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH$

$\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OK}$ لهما نفس المنحى ومنه $\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OK$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB\cos\theta$$

الحالة2 $[\widehat{AOB}]$ زاوية منفرجة $\frac{\pi}{2} \prec \theta \prec \pi$



$$\cos(\pi - \theta) = \frac{OK}{OA} = \frac{OH}{OB}$$

ومنه $OA \times OH = OB \times OK = OB \times OA\cos(\pi - \theta)$

$\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OH}$ لهما منحيان متعاكسان ومنه $\overline{OA} \times \overline{OH} = -OA \times OH$

$\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OK}$ لهما منحيان متعاكسان ومنه $\overline{OB} \times \overline{OK} = -OB \times OK$

و بالتالي $\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = -OA \times OB\cos(\pi - \theta)$

إذن $\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB\cos\theta$

حالة خاصة

إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ فان $O = H \quad ; \quad O = K$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = 0$$

$$OA \times OB\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

إذن $\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB\cos\frac{\pi}{2}$

الوضعية2

O و A و B نقط مستقيمية ومنه $B = H \quad ; \quad A = K$

*$[\widehat{AOB}]$ زاوية منعدمة أي $\theta = 0$

$\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB$ و $\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OA$

اذن $\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB\cos 0$

* $[\widehat{AOB}]$ زاوية مستقيمية أي $\theta = \pi$

$$\overline{OA}\times\overline{OH}=\overline{OB}\times\overline{OK}=OA\times OB\cos\pi$$

خلاصة

لكل θ قياس $\left[\widehat{AOB}\right]$ حيث $0\le\theta\le\pi$

لدينا $\overline{OA}\times\overline{OH}=\overline{OB}\times\overline{OK}=OA\times OB\cos\theta$

2- الجداء السلمي

a)- تعريف

*ليكن $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى
الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هو العدد الحقيقي $OA\times OB\cos\theta$ حيث θ قياس $\left[\widehat{AOB}\right]$.
نرمز له بـ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ نكتب $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\cos\theta$
* اذا كان $\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ أو $\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ فان $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

ملاحظة

$$\cos\left(\widehat{AOB}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA\times OB}$$

b)- المربع السلمي و المسافة

* ليكن $O\neq A$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=OA\times OA\cos\widehat{AOA}=OA^2$$

الجداء السلمي $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$ يسمى الربع السلمي لـ $\overrightarrow{OA}$
نرمز له بـ $\overrightarrow{OA}^2$ نكتب $\overrightarrow{OA}^2=OA^2$

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع حيث $AB=3$
أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

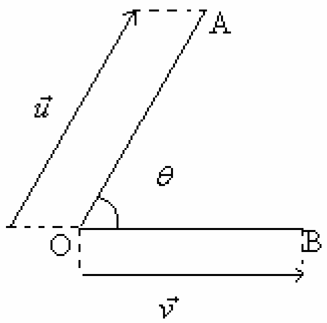
تمرين

1- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في الحالتين التاليتين

أ- $AB=2$ $\quad AC=6$ $\quad \widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ ب- $AB=5$ $\quad AC=4$ $\quad \widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$

2- أحسب $\widehat{BAC}$ علما أن $AB=2\sqrt{2}$ $\quad AC=6$ $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$

c) الجداء السلمي لمتجهتين



$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\cos\theta=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\theta$$

تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و θ قياس $\left[\widehat{AOB}\right]$
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ حيث
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\theta$
إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ملاحظة

* لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$
و θ قياس $\left[\widehat{AOB}\right]$ لدينا $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

* $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

تمرين لتكن A و B نقطتين حيث $AB = 4$

أنشئ M في الحالتين التاليتين

أ- $AM = 8 \quad ; \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 16$

ب- $AM = 6 \quad ; \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -12\sqrt{3}$

تمرين

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين و $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ و θ قياس $\left[\widehat{AOB}\right]$ حيث

1- نعتبر $\|\vec{u}\| = 3 \quad ; \quad \|\vec{v}\| = 5$

أحسب في الحالات التالية

(a $\theta = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad$ (b $\theta = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad$ (c $\theta = \pi$

2- حدد θ في الحالات التالية

أ- $\|\vec{u}\| = 3 \quad ; \quad \|\vec{v}\| = 4 \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 6\sqrt{3}$

ب- $\|\vec{u}\| = \sqrt{3} \quad ; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -\sqrt{3}$

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع حيث $AB = 4 \quad ; \quad AC = 2$

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$

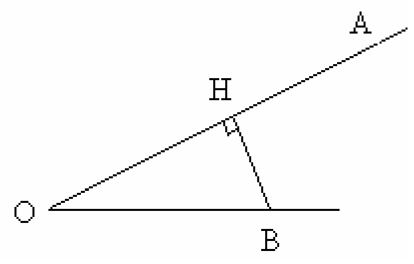
3- تعريف ثاني للجداء السلمي

من خلال الأنشطة السابقة رأينا أن $\overline{OA}\times\overline{OH} = OA\times OB\cos\theta$

أ- تعريف

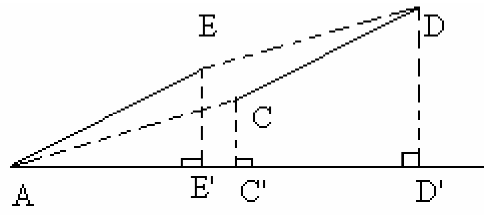
لتكن $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متجهتين غير منعدمتين

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overline{OA}\times\overline{OH}$ حيث H المسقط العمودي لـ B على (OA).



ب- تعميم

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين



توجد نقطة وحيدة E حيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$

لتكن C' ; D' ; E' المساقط العمودية للنقط

C ; D ; E على (AB)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \overline{AB}\times\overline{AE'}$

لدينا $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ ومنه $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{C'D'}$ لان الإسقاط يحافظعلى معامل الاستقامية

ومنه $\overline{AE'} = \overline{C'D'}$

إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{AB}\times\overline{C'D'}$

خاصية

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{AB}\times\overline{C'D'}$ حيث C' ; D' المسقطان العموديان لـ C ; D على (AB) بالتوالي.

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في الرأس A حيث $BC=6$.

أحسب $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

4- خاصيات الجداء السلمي

أ- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$

و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و θ قياس $[\widehat{AOB}]$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

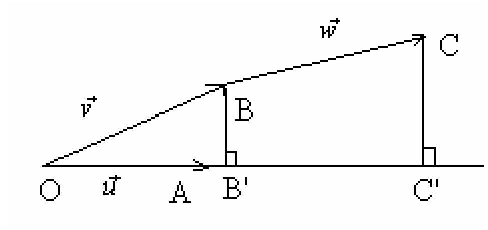
خاصية

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\quad$ نقول إن الجداء السلمي تماثلي

ب- نحسب $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{BC}$

B' و C' المسقطان العموديان لـ B و C على (OA)



$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{0C}$$

$$=\overline{OA}\times\overline{0C'}=\overline{OA}\times\overline{OB'}+\overline{OA}\times\overline{B'C'}$$

$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

خاصية

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$$

ج- خاصية

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\alpha\vec{v}=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

قواعد

لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و لكل $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}\qquad\alpha\vec{u}\cdot\beta\vec{v}=\alpha\beta\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$$

ملاحظات

لتكن $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ و θ قياس الزاوية المحددة بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

إذا كان $0\leq\theta\prec\frac{\pi}{2}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}\succ0$

إذا كان $\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}\prec0$

تمرين

1- $\|\vec{u}\|=2\quad\|\vec{v}\|=3\qquad\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{-1}{2}$

أحسب

$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+4\vec{v})$

$(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

$(3\vec{u}+\vec{v})^2$

-2 $\|\vec{u}\|=2$ $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$ $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{10}$

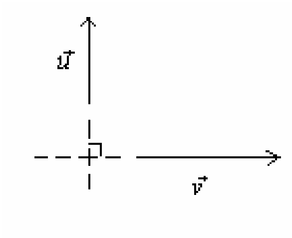
أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$

5- تعامد متجهتين

تعريف

نقول إن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}$

نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$



ملاحظات

*- $\vec{0}$ عمودية على أي متجهة

*- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتان للمستقيمين (Δ) و(D)

$(\Delta)\perp(D)$ تكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$

*- $\vec{u}^2=0$ تكافئ $\vec{u}=\vec{0}$

تمرين

-1 $\|\vec{u}\|=2$ $\|\vec{v}\|=3$ $\vec{u}\perp\vec{v}$

أحسب $(-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+4\vec{v})$

تمرين

ليكن ABC مثلثا حيث $AB=1$ و $CB=CA=\sqrt{2}$ و D نقطة حيث $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ و I منتصف $[AB]$

-1 أ- عبر عن $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ب- بين أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

استنتج أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ واستنتج $\cos\widehat{BAC}$

ج- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و استنتج طبيعة BAD

-2 نعتبر M حيث $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

أ- عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$

ب- أحسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

ج- بين أن $(MD)\perp(AC)$

تمرين

ليكن ABC مثلثا

بين مهما كانت M من المستوى

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

6- تطبيقات الجداء السلمي

أ- مبرهنة الكاشي

ليكن ABC مثلثا

$$BC^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$$
$$=AC^2+AB^2-2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=AC^2+AB^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$

مبرهنة

في مثلث ABC

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$

ملاحظة

-* $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\times AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\times AC \times BC \times \cos\widehat{BCA}$

* $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2\times AB \times AC}$

* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$

تمرين

ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 3$ و $CB = \sqrt{37}$ و $CA = 4$

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\cos\widehat{BAC}$

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أثبت $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

ب- مبرهنة المتوسط

ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$

أثبت أن $AC^2 + AB^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

مبرهنة

في مثلث ABC اذا كان I منتصف $[BC]$ فان $AC^2 + AB^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

تمرين

ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 3$ و $CB = 6$ و $CA = 4$

أحسب أطوال متوسطات المثلث ABC

تمرين

ليكن $ABCD$ رباعيا و I و J منتصفا $[AC]$ و $[BD]$

أثبت أن $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

تمرين

ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و $CB = 2$

1-أ- أحسب $\cos\widehat{BAC}$

ب- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2- ليكن I منتصف $[BC]$. حدد AI

3- لتكن D نقطة حيث $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ استنتج طبيعة المثلث ABD

د- العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية

أنشطة

ليكن ABC مثلثا و A' منتصف $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC)

بين أن

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 - \overline{BH}\times\overline{BC}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2 - \overline{CH}\times\overline{CB}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH^2 + \overline{HB}\times\overline{HC}$$

مبرهنة

ليكن ABC مثلثا و A' منتصف $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC)

يكون ABC مثلثا قائم الزاوية في A اذا و فقط اذا تحقق أحد الشروط التالية

* $AC^2 + AB^2 = BC^2$
* $AA' = \dfrac{BC}{2}$
* $AB^2 = \overline{BH}\times\overline{BC}$
* $AC^2 = \overline{CH}\times\overline{CB}$
* $AH^2 = -\overline{HB}\times\overline{HC}$