الحدوديات

I - حدودية من الدرجة n

1- أنشطة

1- حدد من بين التعابير التالية تلك التي تمثل حدوديات وحدد درجتها

$$P(x)=\frac{1}{3}x^5-3x \quad ; \quad Q(x)=x^2-\sqrt{2}x+3$$

$$H(x)=-6 \quad ; \quad T(x)=3x^2+2|x|$$

$$G(x)=2\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x} \quad ; \quad K(x)=2x^4-2\sqrt{x}+2$$

2- هل الحدوديتين P و Q متساويتان في كل الحالات

* $P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ $\qquad$ $Q(x)=3x^2+x^3-4x+1+3x^3$

* $P(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)x^2-4x+1$ $\qquad$ $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2-4x+1+$

* $P(x)=-3x^3+x^2-x$ $\qquad$ $Q(x)=x^2-3x^3+x$

3- لتكن $P(x)=(a+b)x^3+(b-c)x^2+(a-c+1)x$

حدد a و b و c لكي تكون $P(x)$ حدودية منعدمة.

2- تعاريف

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

نعتبر a_0; a_1; a_2...... a_n **أعداد حقيقية و** $a_n\neq 0$

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}...........+a_xx+a_0$$

التعبير $P(x)$ **أو** P **تسمى حدودية من الدرجة** n $\deg P=n$ **.**

العدد a_i $(0\le i\le n)$ **يسمى معامل الحد من الرجة** i

تكون حدودية منعدمة إذا وفقط إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة

ملاحظة الحدودية المنعدمة ليس لها درجة.

تكون حدوديتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الرجة متساوية.

كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية وتكتب على شكل $ax+b$

حيث $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}$

الحدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثية الحدود و تكتب على شكل ax^2+bx+c

حيث $a\in\mathbb{R}^*$ $(b;c)\in\mathbb{R}^2$

II- مجموع و جداء

1- أنشطة

أ- أحسب $P(x)+Q(x)$ و $P(x)-Q(x)$ مع مقارنة $d^\circ(P+Q)$ و $d^\circ(P)+d^\circ(Q)$

* $P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ $\qquad$ $Q(x)=3x^5-3x^3-6x-3$

* $P(x)=-4x^6+2x^3-6x^2+1$ $\qquad$ $Q(x)=4x^6-3x^3-4x^2-6$

ب- أحسب $P(x)\times Q(x)$ مع مقارنة $d^\circ(P\times Q)$ و $d^\circ(P)\times d^\circ(Q)$

* $P(x)=-3x+2$ $\qquad$ $Q(x)=2x^2-6x-3$

* $P(x)=3x^2-4x+1$ $\qquad$ $Q(x)=x^3-x^2-3$

ج – عمل

$$P(x)=(x-3)^2-(5x+6)^2 \qquad Q(x)=(x+1)^3-27(x-1)^3$$

2- خاصيات

خاصية1

مجموع حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P+Q$

ملاحظة $d^\circ(P+Q)\le \sup(d^\circ(P);d^\circ(Q))$

خاصية2

فرق حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P-Q$

ملاحظة $d^\circ(P-Q)\le \sup(d^\circ(P);d^\circ(Q))$

خاصية3

جداء حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P\times Q$

ملاحظة $d^\circ(P\times Q)=d^\circ(P)+d^\circ(Q)$

III- القسمة على x-a

1) أنشطة

أ- نعتبر $P(x)=x^3+x+1$

- أحسب $P(3)$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)-P(3)=(x-3)Q(x)$

ب- نعتبر $P(x)=2x^4-3x^2-x-2$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)-P(1)=(x-1)Q(x)$

- حدد حدودية $Q'(x)$ حيث $P(x)-P(2)=(x-2)Q'(x)$

2) خاصية

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\ge 1$ و α عدداحقيقيا . توجد حدودية وحيدة $Q(x)$ درجتها $n-1$ حيث $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$

$Q(x)$ خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$

$P(\alpha)$ باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$

3) تقنية لحساب الخارج و الباقي

لنحدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x-3$

حيث $P(x)=-3x^4+2x^3-x^2-5x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^4+2x^3-x^2-5x+1 & x-3 \\ \cline{2-2}
3x^4-9x^3 & -3x^3-7x^2-22x-71 \\
-7x^3-x^2 & \\
7x^3-21x^2 & \\
-22x^2-5x & \\
22x^2-66x & \\
-71x+1 & \\
71x-213 & \\
-212 &
\end{array}
$$

ملاحظة $P(3)=-212$

* $P(x)=-2x^5-x^2+3x-2$

حدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x-2$

4- تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
نقول ان $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ اذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$
حيث $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

تمرين بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-2$

نلاحظ أن $P(2)=0$

5) جدر حدودية

تعريف

تكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا
نقول ان العدد α جدر للحدودية $P(x)$ اذا كان $P(\alpha)=0$

تمرين

نعتبر $P(x)=x^3+4x^2+x-6$

حدد من بين الأعداد التالية تلك التي تمثل جدرا لـ $P(x)$ 1 و-1 و 2 و -3.

حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-1)Q(x)$

نتيجة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جدرا للحدودية $P(x)$.

تمرين نعتبر $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1- تأكد أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

2- بإنجاز القسمة الاقليدية حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-3)Q(x)$

3- بين أن -1 جدرا للحدودية $Q(x)$. عمل $Q(x)$.

استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.

تمرين $P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$

1- أحسب $P(-2)$ و $P(1)$ و $P(3)$

2- أنجز القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x+2$

3- بين إذا كان α جدرا غير منعدم لـ $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ جدر

لـ $P(x)$. استنتج الجذور الثلاث.

تمرين $P(x)=2x^3+mx^2-11x-6$

1- حدد m حيث $P(x)$ تقبل القسمة على $x-2$

2- نضع $m=3$. أحسب $P(-3)$

استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.