العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$

I- أنشطة

نشاط1

1- أحسب $-\frac{2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

2- لتكن a و b و c أعداد حقيقية
أحسب $-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$

نشاط2

1- أحسب $\sqrt{5^2\times 3^3}+\sqrt{75}-11\sqrt{3}+2\sqrt{243}$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

2- أ- أحسب $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم بسط $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

ب- بسط $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$; $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين الحقيقيين $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

4- بين أن $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=4$

نشاط3

1- عمل $(x+2)^2+x^2-4$ ، $(2x-1)^2-(3x+2)^2$ ، $27x^3-8$; $x^3+125-5x(x+5)$

2- نضع $a+b=1$; $a^2+b^2=2$ أحسب a^4+b^4 ; a^6+b^6

نشاط 4

1- أوجد الأعداد الحقيقية x و y و z المتناسبة مع $-\frac{1}{2}$ و 4 و 3 حيث $2x-y+3z=24$

2 - حدد أطوال أضلاع مثلث متناسبة عكسيا مع 3 و 4 و $\frac{12}{5}$ حيث محيطه 12 .

II- تذكير و إضافات

1- ملخص لأهم العمليات في $\mathbb{R}$

أ- الجمع

* الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $a+b=b+a$

* الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a+b)+c=a+(b+c)$

* 0 هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $0+a=a+0=a$

* لكل عدد حقيقي a مقابل هو $-a$: $-a+a=a+(-a)=0$

ب- الطرح

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $a-b=a+(-b)$

ج- الضرب

* الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $a\times b=b\times a$

* الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

* 1 هو العنصر المحايد لضرب في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $1\times a=a\times 1=a$

* لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$ $\left(a^{-1}\right)$: $a^{-1}\times a=a\times a^{-1}=1$

* الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $a\cdot(b+c)=ab+ac$; $(b+c)\cdot a=ba+ca$

د- الخارج

ليكن a من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{R}^*$ $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

ذ- نتائج

* لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$: $a=b$ تكافئ $a+c=b+c$
* لتكن a و b من $\mathbb{R}$ و c من $\mathbb{R}^*$: $a=b$ تكافئ $ac=bc$
* لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $a+c=b+d$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $ac=bd$

* $ab=0$ تكافئ $a=0$ أو $b=0$

$ab\neq 0$ تكافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ تكافئ $ad=bc$

* لكل a من $\mathbb{R}$ و b و c و d من $\mathbb{R}^*$ $\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

2- الجذور المربعة

أ- تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}^+$

العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2=x$ يسمى لجذر المربع للعدد الموجب x.

$$x=y^2 \quad ; \quad y\geq 0 \text{ تكافئ } y=\sqrt{x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^+$$

ب- خاصيات

ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=x \quad ; \quad \sqrt{x^2}=x \quad ; \quad \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y\neq 0)$$

3- القوى

لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ و لكل n و m من $\mathbb{Z}$

$$(xy)^n=x^ny^n \qquad \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m} \qquad x^nx^m=x^{n+m}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad \frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n \qquad \left(x^n\right)^m=x^{n\cdot m}$$

حالة خاصة لكل x من $\mathbb{R}^*$ $\quad x^0=1 \quad x^1=x$

4- متطابقات هامة

أ- ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

ب- تعميم

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$ $\quad a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+.....+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

مثال $\quad a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$

5- التناسبة
أ- تعاريف

* نقول إن الأعداد الغير المنعدمة a و b و c و d تكون بهذا الترتيب تناسبا إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

* نقول إن الأعداد الغير المنعدمة a_1 و a_2 و a_3.... a_n متناسبة مع الأعداد الغير المنعدمة b_1 و b_2 و b_3.... b_n إذا كان $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=.......=\frac{a_n}{b_n}$.

* نقول إن الأعداد الغير المنعدمة a_1 و a_2 و a_3.... a_n متناسبة عكسيا مع الأعداد الغير المنعدمة b_1 و b_2 و b_3.... b_n ا كان $\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}}=\frac{a_2}{\frac{1}{b_2}}=\frac{a_3}{\frac{1}{b_3}}=.......=\frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}$.

ب- خاصيات

لتكن a_1 و a_2 و a_3.... a_n و b_1 و b_2 و b_3.... b_n و k_1 و k_2 و k_3.... k_n أعداد حقيقية غير منعدمة

إذا كان $\alpha=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=.......=\frac{a_n}{b_n}$ فان $\alpha=\frac{a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3......+a_nk_n}{b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3......+b_nk_n}$

شريطة أن يكون $b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3......+b_nk_n\neq 0$

بصفة خاصة

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

$$c+d\neq 0 \qquad c-d\neq 0$$

6- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تمرين

1- حل المعادلة $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x-1}{2}=3x+1$ $\quad x\in\mathbb{R}$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{x+1}{x-3}=2$

3- حل وناقش حسب قيم m المعادلات التالية

$x\in\mathbb{R}\quad (m-1)x+2mx+3(m-x)+1=0$

$x\in\mathbb{R}\quad m(x-m)+(m+2)(x+3)=0$

$x\in\mathbb{R}\quad mx+m^2-4=2x$