المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

I- المعادلات من الدرجة الثانية

1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$ كل معادلة على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

2- أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$3x^2-\sqrt{3}x=0 \qquad x^2-5=0 \qquad 2x^2+1=0$$

$$x^2-6x-7=0 \qquad x^2-2x+3=0$$

3- صفة عامة

a) نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c

لنحل المعادلة

$ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد b^2-4ac الذي يسمى مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$

نرمز له بـ Δ نكتب $\Delta=b^2-4ac$

* اذا كان $\Delta\prec 0$ فان $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\succ 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$
* اذا كان $\Delta=0$ فان $x+\frac{b}{2a}=0$ أي $x=-\frac{b}{2a}$
* اذا كان $\Delta\succ 0$ فان $ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

تكافئ $\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

تكافئ $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

مبرهنة

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ و S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

العدد b^2-4ac الذي يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود ax^2+bx+c نرمز له بـ Δ

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta=0$ فان $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

اصطلاح

إذا كان $\Delta=0$ فان $x=-\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة إذا كان a و c لهما إشارتين مختلفتين فان للمعادلة حلين.

تمرين

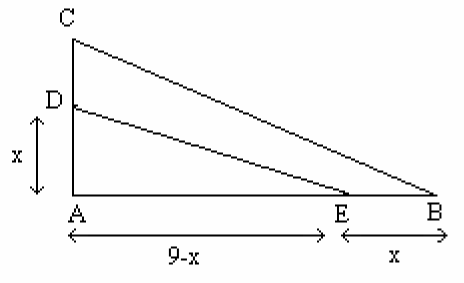
حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$5x^2-4x+2=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$4x^2+3x-1=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$$

تمرين

نعتبر ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=9$ و $AC=4$ حدد موضع نقطتين E و D تنتميان على التوالي لـ$[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD=BE$ و مساحة ADE تساوي مساحة الرباعي $BCDE$



اختيار المجهول نضع $AD=BE=x$

مساحة ADE هي $\dfrac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\dfrac{4\times 9}{2}-\dfrac{x(9-x)}{2}$

لدينا $\dfrac{4\times 9}{2}-\dfrac{x(9-x)}{2}=\dfrac{x(9-x)}{2}$

ومنه $18-9x+x^2=0$.......

b) نتيجة

نعتبر معادلة من شكل $ax^2+2b'x+c=0$ و $a\neq 0$

لدينا $\Delta=4(b'^2-ac)$ نضع $\Delta'=b'^2-ac$

اشارة Δ هي اشارة Δ'

إذا كان $\Delta'\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta'=0$ فان $S=\left\{-\dfrac{b'}{a}\right\}$

إذا كان $\Delta'\succ 0$ فان $S=\left\{\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد Δ' يسمى المميز المختصر للمعادلة

تمرين

حل $6x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$

4- تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c$ / $a\neq 0$

ليكن Δ مميزها

* إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $T(x)$ لا تقبل جدرا و بالتالي $T(x)$ لا يمكن تعميلها في $\mathbb{R}$

* إذا كان $\Delta=0$ فان $T(x)$ لها جدر وحيد $\dfrac{-b}{2a}$ وبالتالي $T(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

* إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $T(x)$ لها خدرين مختلفين x_1 و x_2

وبالتالي $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

تمرين

عمل $P(x)=3x^2-4x-4$ $\qquad Q(x)=x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

مثال1 حل $x^4-7x^2+12=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$

مثال2 حل $2x-7\sqrt{x}-4=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$

مثال3 نعتبر $P(x)=2x^3-3x^2-x+1$

أحسب $P\left(\frac{1}{2}\right)$

حل المعادلة $P(x)=0$

6- مجموع و جداء جدرى ثلاثية الحدود

أ- نعتبر $ax^2+bx+c=0$ $x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

لنفترض أن $\Delta\succ 0$ و أن جذريها هما x_1 و x_2

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x-x_1)(x-x_2)\\ &= ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2 \end{aligned}$$

إذن $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$

خاصية

إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ حلان x_1 و x_2 فانهما يحققان العلاقتين

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

تمرين

تأكد أن للمعادلة $4x^2-7x+5=0$ جدران x_1 و x_2 ثم أحسب $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ دون حساب x_1 و x_2

ب- البحث عن عددين نعلم مجموعهما و جدائهما

مثال حدد u و v حيث $\begin{cases} u+v=-2\\ uv=-15\end{cases}$

صفة عامة

حدد u و v حيث $\begin{cases} u+v=s\\ uv=p\end{cases}$

اذا وجد u و v فانهما سيكونان حلان للمعادلة $(x-u)(x-v)=0$

ومنه $x^2-(u+v)x+uv=0$ أي $x^2-sx+p=0$

و نعلم أن $x^2-sx+p=0$ لها حلول إذا و فقط إذا كان $s^2-4p\geq 0$

خاصية

ليكن s و p عددين حقيقيين.

لكي يوجد عددان u و v مجموعهما s و جدائهما p فانه يلزم ويكفي أن يكون $s^2-4p\geq 0$ و يكونا العددان u و v حلان لمعادلة $x^2-sx+p=0$

تمرين

حدد u و v حيث مجموعهما s و جدائهما p

a) $s=1$ $\quad p=-3$ $\qquad$ b) $s=2$ $\quad p=3$

تمرين

حدد أبعاد مستطيل محيطه 15 ومساحته 9

II- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهولين

- **تذكير اشارة** $ax+b$

1- اشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c$ / $a\neq 0$

ليكن Δ مميزها

الشكل القانوني $T(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a

إذا كان $\Delta=0$ فان ax^2+bx+c يكون منعدما من أجل $x=\frac{-b}{2a}$ و إشارتها إشارة a لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث x_1 و x_2 جدري ax^2+bx+c

نفترض أن $x_1 \prec x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

خلاصة

إذا كان $\Delta \prec 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \succ 0$ و x_1 و x_2 جدري ax^2+bx+c حيث $x_1 \prec x_2$ فان

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$T(x)$		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

2- المتراجحات

أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$-2x^2+5x-3 \le 0 \qquad 3x^2-2x-8 \prec 0$

$-3x^2+\sqrt{3}x-1 \ge 0 \qquad 4x^2-2x+1 \succ 0$

ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية

مثال1

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين

$$2x^4-9x^2+4 \succ 0$$

$$\frac{x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}{x^2-x-2} \ge 0$$

مثال2

نعتبر $p(x)=6x^3-13x^2+4$

1- تأكد أن 2 جدر للحدودية $p(x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \le 0$

3- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \le 3x^2(x-2)$

تمرين

نعتبر $p(x)=-x^3+(3+a)x^2-(2+3a)x+2a$

1- بين أن a جدر للحدودية $p(x)$

2- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $p(x)=(x-a)Q(x)$

3- أ- أدرس اشارة $-x^2+3x-2$

4- ب- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \succ 0$ حيث $Q(a) \succ 0$