

المرجح

I- مرجح نقطتين

1- النقطة المتزنة

تعريف

لتكن A نقطة من المستوى و α عددا حقيقيا
الزوج $(A; \alpha)$ يسمى نقطة متزنة. نقول كذلك النقطة A معينة بالمعامل α . أو العدد α وزن النقطة A .

2- أنشطة

- لتكن A و B نقطتين مختلفتين
1- أنشئ G حيث $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2- أنشئ G حيث $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
3- هل يمكن إنشاء G حيث $4\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

3- مرجح نقطتين

لتكن A و B نقطتين مختلفتين و α و β عددين حقيقيين

نحدد G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

لدينا $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ تكافئ $(\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}$

*- إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{AB}$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

*- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإن $\beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

- إذا كان $\beta \neq 0$ فإن $\beta\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ومنه لا توجد نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

- إذا كان $\beta = 0$ فإن $\alpha = 0$ و بالتالي جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

مبرهنة و تعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ نقطتين متزنتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإن النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ لا تقبلان مرجحا.

4- مركز ثقل نقطتين

تعريف

مركز ثقل نقطتين A و B هو مرجح A و B المعين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل نقطتين A و B هو منتصف $[AB]$

5- خاصة

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد α و β حيث G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ في الحالتين

$$أ- \quad 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{AB}$$

ب- A مركز ثقل G و B .

6- الخاصة المميزة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$

G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

مبرهنة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

نتيجة

$\alpha + \beta \neq 0$ و β و α عدنان حقيقيان حيث

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} \overrightarrow{AB}$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \overrightarrow{BA}$

ملاحظة

مرجح نقطتين مختلفتين A و B تنتمي إلى المستقيم (AB)

تمرين

أنشئ G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 3)$ ثم أنشئ G' مرجح $(A; 2)$ و $(B; 1)$
أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة \overrightarrow{AB}

تمرين

أنشئ I مرجح $(A; 2)$ و $(C; 1)$ ثم J مرجح $(A; 1)$ و $(B; 2)$ و K مرجح $(C; 1)$ و $(B; -4)$
1- أثبت أن B مرجح $(C; 1)$ و $(K; 3)$
2- بين أن J منتصف $[KI]$.

7- احداثيات مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ و $G(x_G; y_G)$
إذا كان G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ فان

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

مثال حدد إحداثيتي G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 6)$ حيث $A(-1; 2)$ و $B(-4; 3)$

II- مرجح ثلاث نقط

1- أنشطة

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى

1- أنشئ G حيث $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2- هل يمكن إنشاء G حيث $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2- مرجح ثلاث نقط

لتكن A و B و C نقط مختلفة و α و β و λ أعداد حقيقية

نحدد G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (*)

لدينا (*) تكافئ $(\alpha + \beta + \lambda)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$

*- إذا كان $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ فان $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta + \lambda)} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{(\alpha + \beta + \lambda)} \overrightarrow{AC}$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

*- إذا كان $\alpha + \beta + \lambda = 0$ فان $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فانه لا توجد نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ فان جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

مبرهنة و تعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta + \lambda = 0$ فإن النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ لا تقبل مرجحا

3- مركز ثقل ثلاث نقط

تعريف

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح A و B و C المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$

خاصة

متوسطات مثلث ABC تتلاقى في نقطة وحيدة G هي مركز ثقل المثلث ABC

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

و تحقق $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ إذا كان A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي فإن $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ و $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}$

$$\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CC'}$$

4- خاصة

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

5- الخاصة المميزة

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ و β و α و λ أعداد حقيقية حيث

G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ تكافئ $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \lambda\vec{GC} = \vec{0}$

تكافئ $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \lambda\vec{MC} = (\alpha + \beta + \lambda)\vec{MG}$

مبرهنة

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ و β و α و λ أعداد حقيقية حيث

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \lambda\vec{MC} = (\alpha + \beta + \lambda)\vec{MG}$$

6- خاصة التجميعية

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ و β و α و λ أعداد حقيقية حيث

G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ ومنه $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \lambda\vec{MC} = (\alpha + \beta + \lambda)\vec{MG}$

* لو كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ تقبل مرجحا G_1 ومنه $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{MG}_1$

وبالتالي $(\alpha + \beta)\vec{MG}_1 + \lambda\vec{MC} = ((\alpha + \beta) + \lambda)\vec{MG}$

إذن G مرجح $(G_1; \alpha + \beta)$ و $(C; \lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_2; \alpha + \lambda)$ و $(B; \beta)$ حيث G_2 مرجح $(A; \alpha)$ و $(C; \lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_3; \beta + \lambda)$ و $(A; \alpha)$ حيث G_3 مرجح $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$

خاصة

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

تمرين

أنشئ G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 2)$

أنشئ G' مرجح $(A; -3)$ و $(B; 2)$ و $(C; -1)$

7- احداثيات مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

و $C(x_C; y_C)$ و $G(x_G; y_G)$ إذا كان G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ فإن

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \lambda x_C}{\alpha + \beta + \lambda} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha + \beta + \lambda} \end{cases}$$

تمرين

$\overline{AD} = \frac{4}{5}\overline{AB}$ حيث D نقطة حيث $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;-2)$ و D نقطة حيث $\overline{AD} = \frac{4}{5}\overline{AB}$

أنشئ الشكل
بين أن D و C و G مستقيمة

III- مرجح أربع نقط

1- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} + \lambda\overline{GC} + \mu\overline{GD} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta + \lambda + \mu = 0$ فإن النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ لا تقبل مرجحا

2- مركز ثقل أربع نقط

تعريف

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$ بالبنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

3- خاصة

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

4- الخاصية المميزة

مبرهنة

$\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$ و λ و μ أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$
تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$$\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} + \lambda\overline{MC} + \mu\overline{MD} = (\alpha + \beta + \lambda + \mu)\overline{MG}$$

5- خاصة التجميعية

خاصة

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتها.

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;2)$

بين أن $G \in (AC)$