الترتيب في $\mathbb{R}$

I- الترتيب في $\mathbb{R}$

أنشطة

تمرين1

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $-2 \le a \le 3 \quad ; \quad -1 \le b \le 4$

بين أن $-41 \le a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1 \le 24$

تمرين2

قارن $1+3\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$

تمرين3

ليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$

أ- بين أن $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

ب- قارن $\dfrac{1}{2x}$ و $\sqrt{x^2+1} - x$

تمرين4

ليكن a و b عددين حقيقيين سالبين قطعا حيث $a \ne b$

قارن $\dfrac{a}{b} - 1$ و $1 - \dfrac{b}{a}$

تذكير

إذا كان $a \ge b$ و $c \ge 0$ فان $ac \ge bc$
إذا كان $a \ge b$ و $c \le 0$ فان $ac \le bc$
إذا كان $a \ge b \ge 0$ فان $a^2 \ge b^2$
إذا كان $0 \ge a \ge b$ فان $a^2 \le b^2$

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^{+2}$
$a \le b$ تكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

إذا كان a و b عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة و كان $a \le b$ فان $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

II- المجالات و المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1- المستقيم العددي

المستقيم العددي هو كل مستقيم منسوب إلى معلم

مثل النقط $A\left(-\dfrac{5}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\dfrac{7}{3}\right) \quad ; \quad C\left(\sqrt{2}\right)$

2- أنشطة

تمرين1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات و مثل مجموعة حلولها

$$\frac{2x-1}{3} \le \frac{5x+1}{2}$$

$$(x+3)^2 \ge (x+3)(3x-1)$$

$$\frac{5x+2}{x-2} \succ 2$$

تمرين2

1- حل وناقش حسب قيم m المتراجحة $2mx - 2 \le -3x + m^2 \quad x \in \mathbb{R}$

2- حل في $\mathbb{R}$ $\begin{cases} 2x+1 \succ 3x-1 \\ 3x+1 \succ x+2 \end{cases}$

3- مركز و سعة وشعاع مجال

ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $a\leq b$

على المستقيم العددي نعتبر $A(a)$; $B(b)$

طول $[A;B]$ هو $b-a$

أفصول I منتصف $[A;B]$ هو $\frac{a+b}{2}$

$IA=IB=\frac{b-a}{2}$

تعريف

ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $a\leq b$

مركز مجال طرفاه a و b هو $\frac{a+b}{2}$

سعة مجال طرفاه a و b هو $b-a$

شعاع مجال طرفاه a و b هو $\frac{b-a}{2}$

تمرين

1- حدد مركز وشعاع $]-3;5]$

2- حدد مجالا مفتوحا مركزه 2- وشعاعه 3

3-حدد مجالا مغلقا مركزه 1 و أحد طرفيه $\frac{-3}{2}$

III- القيمة المطلقة و المجالات

1- القيمة و المطلقة

a) **أنشطة**

حدد $\left|1-\sqrt{2}\right|$ و $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}$ و $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$

b) **تعريف**

ليكن $x\in\mathbb{R}$

إذا كان $x\geq 0$ فان $|x|=x$

إذا كان $x\leq 0$ فان $|x|=-x$

c) **خاصيات**

*- لكل $x\in\mathbb{R}$ $|x|=|-x|$

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ و a من $\mathbb{R}^+$

✓ $|x|=0$ تكافئ $x=0$

✓ $|x|=a$ تكافئ $x=a$ أو $x=-a$

✓ $|x|=|y|$ تكافئ $x=y$ أو $x=-y$

✓ اذا كان x أفصول نقطة M على محور ممنظم أصله O فان $OM=|x|$.

✓ اذا كان $M(x)$ و $N(y)$ من محور ممنظم فان $MN=|y-x|$.

✓ $|xy|=|x||y|$; $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ $y\neq 0$

✓ $|x|\leq a$ تكافئ $-a\leq x\leq a$

✓ $|x+y|\leq|x|+|y|$

تمارين

1- حل في $\mathbb{R}$ $|2x-3|=5$ و $|x+2|=|2x-5|$

2- بين بدون فصل الحالات أن المعادلة $|2x-1|+|2x+5|=3$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

3- نعتبر $p(x)=|3x-1|+|x+2|$

a) أكتب $p(x)$ بدون استعمال الرمز $|\ |$

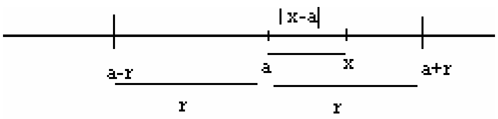
b) حل في $\mathbb{R}$ $\quad p(x)=3$

2- القيمة المطلقة والمجالات

مبرهنة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r\in\mathbb{R}_+^*$

$|x-a|\le r$ تكافئ $a-r\le x\le a+r$

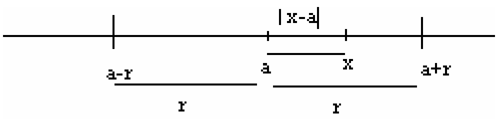


$$[a-r;a+r]=\{x\in\mathbb{R}/|x-a|\le r\}$$

نتيجة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r\in\mathbb{R}_+^*$

$|x-a|<r$ تكافئ $a-r<x<a+r$

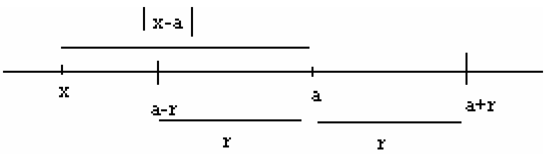


$$]a-r;a+r[=\{x\in\mathbb{R}/|x-a|<r\}$$

نتيجة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r\in\mathbb{R}_+^*$

$|x-a|\ge r$ تكافئ $x\ge a+r$ أو $x\le a-r$



$$\{x\in\mathbb{R}/|x-a|\ge r\}=]-\infty;a-r]\cup[a+r;+\infty[$$

تمرين حل $|2x-1|\ge 5$ $\quad x\in\mathbb{R}$

IV- التأطير

1- أنشطة

أ- حدد مجالا مفتوحا سعته 10^{-2} يحتوي على $\frac{2}{3}$

ب- علما أن $1,41<\sqrt{2}<1,42$

حدد مجالا مغلقا يحتوي على $-3\sqrt{2}$ سعته $7\cdot 10^{-2}$

2- تعريف

ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $a<b$

كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة $a\le x\le b$ و $a<x\le b$ و $a\le x<b$ و $a<x<b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

أمثلة

$0<\frac{2}{3}<1$ تأطير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 1

$0,666<\frac{2}{3}<0,667$ تأطير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 10^{-3}

3- التأطير و العمليات

a) **أنشطة**

1- ليكن $-3 \prec x \prec 5 \quad ; \quad 2 \prec y \prec 4$ أطر $x^2+3x-\dfrac{1}{y}-5$

2- ليكن $|y| \prec 1 \quad ; \quad |x| \prec 1$

أ- أطر $\dfrac{1}{x+y+xy+4}$

ب- أطر $(x+1)(y+1)$. أنشر $(x+1)(y+1)$

استنتج تأطيرا للعدد $\dfrac{1}{x+y+xy+4}$

b) **تأطير مجموع – تأطير فرق**

خاصية

إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ فان $a+c \le x+y \le b+d$

إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ فان $a-d \le x-y \le b-c$

c) **تأطير جداء**

أمثلة

* لنحدد تأطيرا للعدد $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ سعته $7\cdot 10^{-3}$ علما أن $1,41 \prec \sqrt{2} \prec 1,42$

* نعتبر $-0,01 \prec y \prec 0,02 \quad , \quad 1,53 \prec x \prec 1,54$

حدد تأطيرا للعدد xy سعته $6\cdot 10^{-2}$

d) **تأطير خارج**

ليكن $0,2 \prec y \prec 0,4 \quad , \quad 1,2 \prec x \prec 1,4$

حدد تأطيرا للعدد $\dfrac{y}{x}$ سعته $0,20$

V- التقريب

1- تعريف

ليكن $a \le x \le b$ أو $a \prec x \le b$ أو $a \le x \prec b$

أو $a \prec x \prec b$ تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

العدد a يسمى تقريب للعدد x الى $b-a$ بتفريط

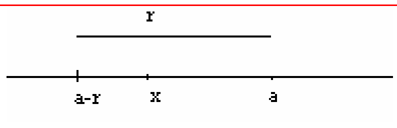
العدد b يسمى تقريب للعدد x الى $b-a$ بافراط

أمثلة $-0,67 \prec \dfrac{-2}{3} \prec -0,66$

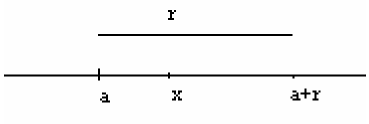
$0,53 \prec \dfrac{2}{3} \prec 0,72$

خاصية

إذا كان a تقريب للعدد x إلى r بإفراط فان $a-r \le x \le a$



اذا كان a تقريب للعدد x الى r بتفريط فان $a \le x \le a+r$



تمرين لنحدد تقريبات للعدد $\dfrac{22}{3}$ إلى 10^{-3} بإفراط

تمرين ليكن $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

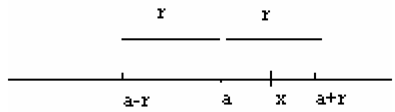
إذا علمت أن $2,236$ تقريب للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-3} بتفريط فأعط تقريب للعدد x إلى 10^{-3} بتفريط ثم بإفراط

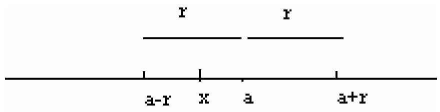
2- قيمة مقربة

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا

كل عدد حقيقي a يحقق $|x-a|\le r$ يسمى قيمة مقربة (أوتقريبا) للعدد x الى r (أو بالدقة r)





أمثلة

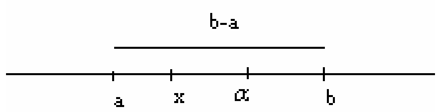
$$\left|\frac{22}{7}-3,14\right|\le 0,003$$

اذن $3,14$ تقريب للعدد $\frac{22}{7}$ الى $3\cdot 10^{-3}$

خاصية

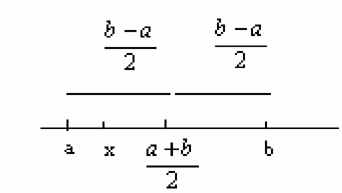
ليكن $x\in[a,b]$

كل عدد α من $[a,b]$ تقريب للعدد x الى $b-a$



ملاحظة

إذا كان $x\in[a,b]$ فان $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$



مثال

$$1,41\prec\sqrt{2}\prec 1,42$$

العدد $1,415$ تقريب للعدد $\sqrt{2}$ الى $0,005$

تمرين

لنبين أن $-0,14$ تقريب للعدد $\frac{-1}{7}$ بالدقة $5\cdot 10^{-3}$

3- التقريبات العشرية

a) ليكن x عددا حقيقيا

يوجد عدد صحيح نسبي وحيد p حيث $p\le x\prec p+1$

العدد p يسمى الجزء الصحيح للعدد x نرمز له بـ $E(x)$ أو $[x]$

$[x]=p$ تكافئ $p\le x\prec p+1$ $\quad p\in\mathbb{Z}$

b) **التقريبات العشرية**

ليكن x عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا و $[10^n x]=p$

لدينا $p\le 10^n x\prec p+1\quad ;\quad p\in\mathbb{Z}$

ومنه $10^{-n}p\le x\prec 10^{-n}(p+1)\quad ;\quad p\in\mathbb{Z}$

العدد $10^{-n}p$ **تقريب العشري** للعدد x بتفريط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

العدد $(p+1)10^{-n}$ **تقريب العشري** للعدد x بإفراط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

مثال لدينا $666\cdot 10^{-3} \prec \frac{2}{3} \prec 667\cdot 10^{-3}$

العدد $0,666$ تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة3 بتفريط

العدد $0,667$ تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة3 بإفراط

تمرين $1,24$ التقريب العشري للعدد x من الرتبة 2 بتفريط

و $-0,31 \prec y \prec -0,25$

أطر $\frac{y}{x}$ تأطيرا سعته $0,05$