الاشـــــتقاق

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

I- الاشتقاق في نقطة -الدالة المشتقة

A) أنشطـــــــة

نشاط1

باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأفصول x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x)=x^2-2x \quad x_0=1$ ب- $f(x)=x^2-4 \quad x_0=2$

ج- $\begin{cases} f(x)=\sin x & x\le 0 \\ f(x)=x^3-2x & x\succ 0 \end{cases} \quad x_0=0$

نشاط2

حدد الدالة المشتقة f′ للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f′ في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$ ب - $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

ج – $f(x)=\sin 2x\cos x$ د – $f(x)=1+\tan^2 x$

نشاط3

حـدد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+\cos\pi x}{x-1}$

B) تذكـــير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها بـ $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0. نكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

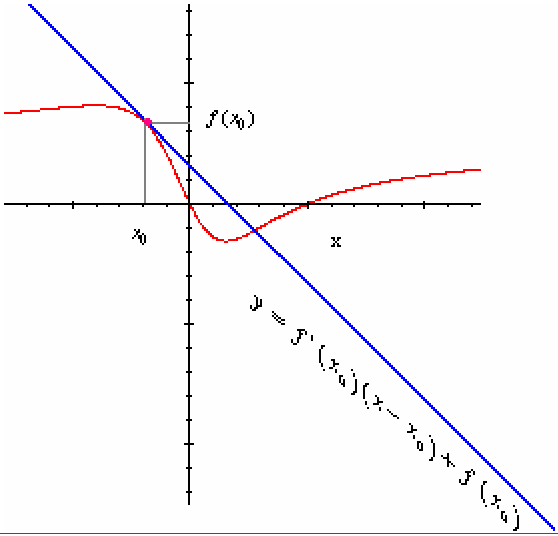
ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0
والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

3- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

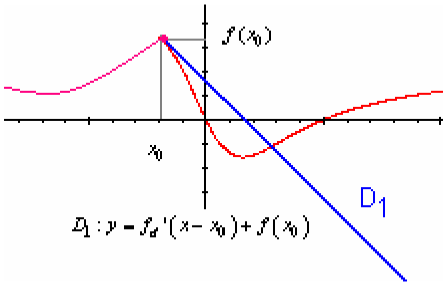
أ- المماس

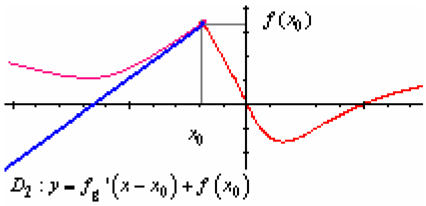
لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها
قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



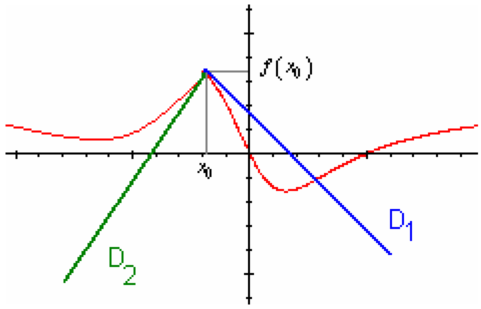
ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس
عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)





$D_1 : y = f_d'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$ $\qquad$ $D_2 : y = f_g'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \prec x_0$

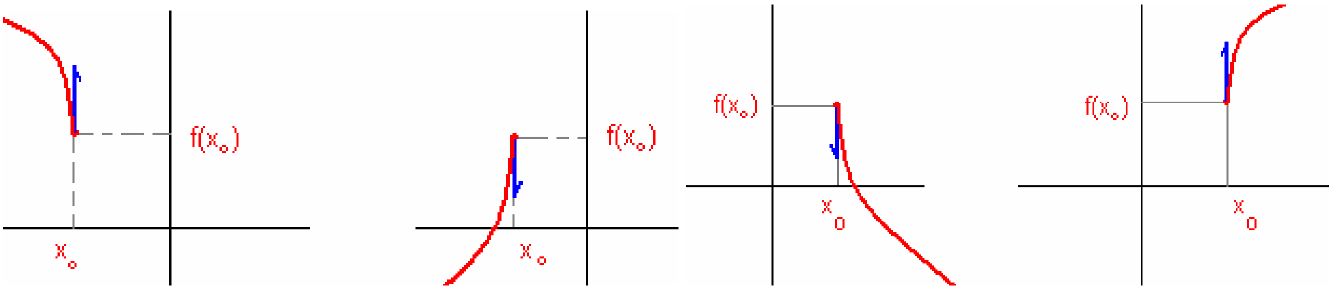


$$D_1 : y = f_d'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$$
$$D_2 : y = f_g'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \prec x_0$$

ج- نصف مماس مواز لمحور الاراتيب

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فان

لـ C_f نصف مماس مواز لمحور الأراتيب.



4- الد الـــــة المشتقة

أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نـقطة من I .
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$\forall x \in I$ بحيث g لا تنعدم على I

*- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\forall x \in I \qquad \left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x)$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{Z}_-^*$ و f لا تنعدم على I

$$\forall x \in I \qquad \left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x)$$

II- مشتقة دالة مركبة – مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$
إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان
$g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x \in I \qquad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \cos\left(x^3 - 4x^2\right) \quad (a \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad (b$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فان الدالة f^{-1} للاشتقاق في $f(x_0)$ و $(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$

خاصية

لتكن f دالة رتيبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I

$$\forall x\in f(I)\quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

3- تطبيقات

أ مشتقة دالة الجدر من الرتبة n

خاصية

* ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و لدينا $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

* ليكن r من $\mathbb{Q}^*$. الدالة $x\to x^r$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و لدينا $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$

خاصية

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $n\in\mathbb{N}^*$ فان الدالة $x\to\sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I.

$$\forall x\in I\quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\left((f(x))^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}(f(x))^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $r\in\mathbb{Q}$.

$$\forall x\in I\quad \left((f(x))^r\right)'=r(f(x))^{r-1}\cdot f'(x)$$

تمرين أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

1- $f(x)=\sqrt[3]{(x-3)^2}$ 2- $f(x)=\sqrt[3]{x-3}^{\,2}$ 3- $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{5}}$

4- $f(x)=\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^{\frac{1}{5}}$ 5- $f(x)=-2x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{2}}$

ب- مشتقةالدوال العكسية للدوال المثلثية

الدالة arctan هي الدالة العكسية للدالة f المعرفة من $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\tan x$

بما أن f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $\left(f'(x)=1+\tan^2 x\right)$ فان الدالة arctan قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\arctan' x=\frac{1}{f'(\arctan x)}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{x^2+1}$

خاصية

* الدالة arctan قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\arctan' x=\frac{1}{x^2+1}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالتان قوس الجيب و قوس جيب التمام قابلتان للاشتقاق على $]-1;1[$

و $\forall x\in\left]-1;1\right[\quad \arcsin' x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\forall x\in\left]-1;1\right[\quad \arccos' x=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

خاصية

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I فان الدالة $\arctan\circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و $$\forall x\in I\qquad \left(\arctan\circ u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$$

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و $u(I)\subset\left]-1;1\right[$ فان الدالة $\arcsin\circ u$ و $\arccos\circ u$ قابلتان للاشتقاق على I

$$\forall x\in I\qquad \left(\arccos\circ u(x)\right)'=\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}$$

و $$\forall x\in I\qquad \left(\arcsin\circ u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}$$

ملاحظات

❖ $$\lim_{x\to -1^+}\frac{\arcsin x+\frac{\pi}{2}}{x+1}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{\arcsin x-\frac{\pi}{2}}{x-1}=+\infty$$

❖ $$\lim_{x\to -1^+}\frac{\arcsin x}{x+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{x-1}=-\infty$$

تمرين أحسب مشتقة f بعد تحديد حيز تعريفها في الحالات

$$f(x)=\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x}} \qquad f(x)=\arctan\sqrt[3]{x}$$

$$f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2} \qquad f(x)=\sqrt{x+1}+\arccos\frac{1}{1+x}$$

تمرين حدد $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{x}$ و $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arccos(1-2x)}{4x^2-1}$ و $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\arcsin\left(\frac{2x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{2}}{x-1}$

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\{x \in D_{u'} / u(x) \succ 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$n \in \mathbb{N}^* \quad x^{\frac{1}{n}}$
$\mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{Q} \quad x^r$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$D_{u'}$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$	$\arctan(u(x))$
$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\{x \in D_{u'} / u(x) \in]-1;1[\}$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arcsin(u(x))$
$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\{x \in D_{u'} / u(x) \in]-1;1[\}$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arccos(u(x))$

III- الدوال الأصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان

$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

أمثلة الدال $F : x \to x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \to \frac{1}{2}x + 2$ على $\mathbb{R}$

الدال $F : x \to \cos x + 3$ دالة أصلية للدالة $f : x \to -\sin x$ على $\mathbb{R}$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I

مجموعة الدوال الأصلية للـدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أمثلة - الدال $F : x \to x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \to \frac{1}{2}x + 2$ على $\mathbb{R}$

إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F_\lambda(x) = x^2 + 2x + \lambda$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$

توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0) = y_0$.

مثال نحدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^3 - 2x + 3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

خاصية

إذا كانت F و G الدالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda \in \mathbb{R}$ فان

* $F + G$ دالة أصلية لـ $f + g$

* λF دالة أصلية لـ λf

خاصية

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

مثال

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 & x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & x \prec 2 \end{cases}$$

بين أن f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ و حدد الدوال الأصلية لـ f.

تمـــارين

1- $f(x) = x\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{3}}$ حدد دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$

(لاحظ أن $f(x) = \alpha u'(x)\left(u(x)\right)^n$ حيث α و n معلومين)

2- $f(x) = \dfrac{3}{4x^2 + 4x + 2}$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x) = \alpha \dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2 + 1}$)

3- $f(x) = \cos^3 x$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$)

5- مبرهنة رول – مبرهنة التزايدات المنتهية

أ- مبرهنة رول

مبرهنة

اذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a;b]$ تحقق الشروط التالية:

1- f متصلة على $[a;b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

3- $f(a)=f(b)$

فانه يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $f'(c)=0$

ملاحظات

- وجود c من $]a;b[$ حيث $f'(c)=0$ لا يستثني وجود نقط أخرى k حيث $f'(k)=0$
- لنطبيق مبرهنة رول الشروط الثلاث ضرورية
- معطيات مبرهنة رول شروط كافية، لكنها غير لازمة

ب- مبرهنة التزايدات المنتهية

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a;b]$ تحقق الشرطين التاليين:

1- f متصلة على $[a;b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

فانه يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$

ملاحظات

وجود c من $]a;b[$ حيث $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$ لا يستثني وجود نقط أخرى k حيث $(b-a)f'(k)=f(b)-f(a)$

تمرين

1- بين أن $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$ $\quad\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

2- استنتج أن $|\sin x|\leq x$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}+$

ج- خاصية

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I=[x_0;+\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

إذا كان $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I فان $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

ملاحظة: يمكن تعويض المجال I بـ $]-\infty;x_0]$ أو $[x_0;a]$ أو $]a;x_0]$ أو $[x_0;a[$ و الخاصية تبقى صالحة

تمرين

1- بين أن $x-\frac{x^3}{3}\arctan x$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^+$

2- بين أن $1-\frac{x^2}{2}\leq\cos x\leq1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

تمرين

ليكن $\alpha\succ1$. نعتبر المتتالية $u_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+................+\frac{1}{n^\alpha}$

بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة.