الدوران

I- تعريف الدوران

1- تعريف

لتكن O نقطة من المستوى الموجه P و α عددا حقيقيا الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' بحيث:

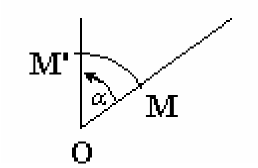
- $M'=O$ اذا كانت $M=O$

- اذا كان $M \neq O$ $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

*- نرمز للدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز $r(O;\alpha)$ أو بالرمز r

*- النقطة M' تسمى صورة M بالدوران r نكتب $r(M)=M'$

نقول كذلك أن الدوران r يحول M الى M'



مثال

لتكن O و A و B ثلاث نقط و r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{6}$

أنشئ A' و B' صورتي A و B على التوالي بالدوران r

2 – استنتاجات

أ) المثلث المتساوي الساقين

- ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A يعني أن الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ يحول B إلى C

- إذا كان ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى C

- إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

ب) الدوران الذي زاويته منعدمة

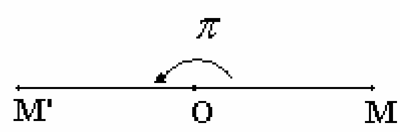
ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

- إذا كان $\alpha \equiv 0 \quad [2\pi]$ فان $r(M)=M$ في هذه الحالة r هو التطبيق المتطابق في المستوى جميع نقط المستوى صامدة

- إذا كان $\alpha \not\equiv 0 \quad [2\pi]$ فان النقطة الوحيد الصامدة بالدوران r هي مركزه O

ج) الدوران الذي زاويته مستقيمية

$r(O;\pi) = S_O$



3- الدوران العكسي

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}\right) \equiv -\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow r'(M')=M \,/\quad r'=r(O;-\alpha)$$

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسم الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بالرمز r^{-1}

$$\begin{cases} r(M)=M' \\ r(O)=O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^{-1}(M')=M \\ r^{-1}(O)=O \end{cases}$$

الدوران r تطبيق تقابلي في المستوى

خاصية

> كل دوران $r(O;\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى
> الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدورا ن العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بـ: r^{-1}

تمارين تطبيقة

1- ليكن $ABCD$ مربعا

حدد زاويتي الدوارنيين r_1 و r_2 الذي مركزاهما A و C على التوالي ويحولان معا النقطة D إلى B

2- ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

أ- حدد مركز الدوران r الذي يحول B إلى C

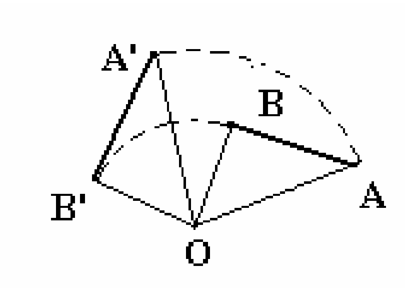
ب- حدد الدوران العكسي للدوران r

II- خاصيات الدوران

1- خاصية أساسية (الحفاظ على المسافة)

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا و A و B نقطتين

$$r(B)=B' \quad ; \quad r(A)=A'$$



لنقارن $AB=A'B'$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين OAB و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$$

$$AB'^2=OA'^2+OB'^2-2OA'\cdot OB'.\cos\left[\widehat{A'OB'}\right]$$

و بما أن $r(A)=A' \quad ; \quad r(B)=B'$ فان:
$\begin{cases} OA=OA' \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'})\equiv\alpha\quad[2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} OB=OB' \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'})\equiv\alpha\quad[2\pi] \end{cases}$

و لدينا من جهة أخرى

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'})+(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})+(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OB})\quad[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha+(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})-\alpha\quad[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})\quad[2\pi]$$

ومنه $\left[\widehat{AOB}\right]=\left[\widehat{A'OB'}\right]$

و بالتالي $A'B'^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $A'B'^2=AB^2$ اذن $A'B'=AB$

خاصية

> ليكن r دورانا و A و B نقطتين
> إذا كان $r(A)=A' \quad ; \quad r(B)=B'$ فان $A'B'=AB$
> نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين
ليكن ABC مثلثا . نعتبر M و N نقطتين خارج المثلث بحيث MAB و NAC مثلثان متساويا الأضلاع
قارن MC و NB

III- الدوران و استقامة النقط

أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r
لتكن M نقطة من $[AB]$ و M' صرتها بالدوران r
1- بين أن $M' \in [A'B']$
2- بين اذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $0 \leq \lambda \leq 1$ λ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r
صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$
اذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $0 \leq \lambda \leq 1$ λ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M) = M'$

ب- صورة مستقيم

لتكن A' وB' صورتي النقطتين المختلفتين A و B بدوران r
أ- بين أن $r([AB)) = [A'B')$
ب- بين أن $r((AB)) = (A'B')$

خاصية

لتكن A' وB' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بدوران r
- صورة نصف المستقيم $[AB)$ هو نصف المستقيم $[A'B')$
- صورة المستقيم (AB) هو المستقيم $(A'B')$
- إذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ λ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M) = M'$

ج- المرجح و الدوران

A' وB' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي و G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$
بين أن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

خاصية

A' وB' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي
اذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$
الدوران يحافظ على مرجح نقطتين

ملاحظة: الخاصية تبقى صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين

نتيجة

A' وB' و I' صورالنقط A و B و I بدوران r على التوالي
إذا كان I منتصف $[AB]$ فان I' منتصف $[A'B']$
الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامة

خاصية (مقبولة)

لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda \in \mathbb{R}$
إذا كان $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$
نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين
ليكن $ABCD$ مربعا
ننشئ خارجه المثلث CBF المتساوي الأضلاع و داخله المثلث ABE متساوي الأضلاع

نعتبر الدوران $r=r\left(B;\frac{\pi}{3}\right)$ و G نقطة حيث $r(G)=D$

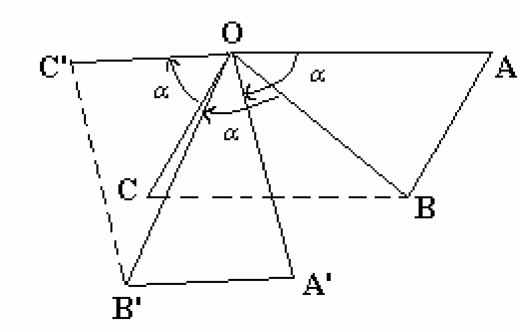
بين أن النقط D و E و F مستقيمية

3- الدوران و الزوايا

أ) خاصية أساسية

لتكن A' وB' صورتي A و B بدوران r زاويته α على التوالي . لتكن C نقطة حيث $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{A'B'}$



و بالتالي $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\quad[2\pi]$

وحيث أن $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ فان $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

خاصية

> ليكن r دورانا زاويته α
>
> إذا كان A' وB' صورتي A و B بالدوران r فان $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

ب- نتيجة

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)+\left(\overrightarrow{C'D'};\overrightarrow{CD}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\alpha+\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

إذن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\quad[2\pi]$

> لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r حيث $A\neq B$ و $C\neq D$
>
> $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\quad[2\pi]$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قيا س الزوايا

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A و (C) دائرة محيطة به . نعتبر M نقطة من القوس $\left[\widehat{AB}\right]$ الذي لا يحتوي على C . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

بين أن M و M' و C نقط مستقيمية حيث $r(M)=M'$

4- صورة دائرة بدوران

خاصية

> صورة دائرة $C(\Omega;R)$ بدوران r هي دائرة $C(\Omega';R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا و (C) دائرة مارة من A و C . لتكن Q و R نقطتا تقاطع (C) مع (BC) و (CD) على التوالي

بين أن $BQ=DR$ (يمكن اعتبار الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$)