تطبيقات الاشتقاق – تمثيل دالة

1- قابلية الاشتقاق و المطراف

أ) لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$

نعتبر f قابلة للاشتقاق في x_0 و تقبل مطرافا في x_0

لنفترض أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0

ومنه يوجد مجال مفتوح J مركزه x_0 ضمن I حيث $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in J$

f قابلة للاشتقاق في x_0 ومنه $f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

أي $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

و حيث $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in J$ فان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \quad \forall x \ge x_0$ و $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \quad \forall x \le x_0$

ومنه $f_g'(x_0) \ge 0$; $f_d'(x_0) \le 0$ أي أن $f'(x_0) \ge 0$; $f'(x_0) \le 0$ اذن $f'(x_0) = 0$

(إذا كانت f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0 نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

مبرهنة

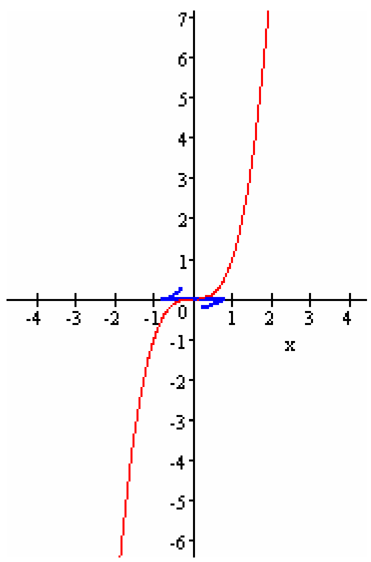
لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$
اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

ملاحظة: المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

مثال $f(x) = x^3$; $x_0 = 0$

f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و $f'(0) = 0$

و مع ذلك f لا تقبل مطرافا عند 0



2- الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط اذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة علىI أي $f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in I$
(f' موجبة قطعا على I أي $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in I$)
تكون f تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة علىI أي $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in I$
(f' سالبة قطعا على I أي $f'(x) \prec 0 \quad \forall x \in I$)
تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة علىI أي $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

مثال نعتبر $f(x) = x^3 - 6x + 1$

أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرا ت f (في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)

حدد مطاريف f ان وجدت

ملاحظة لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

f تقبل مطرافا في x_0 اذا و فقط اذا كانت f' تنعدم في x_0 و تتغير اشارتها في مجال مفتوح يحتوي على x_0

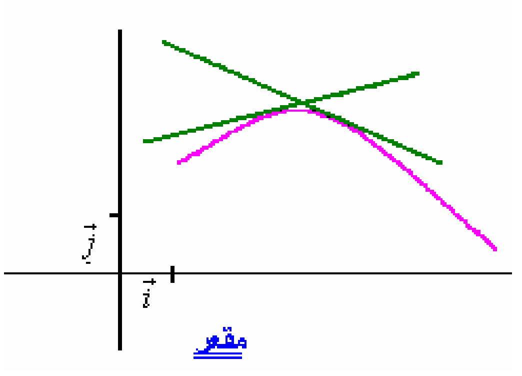
3- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

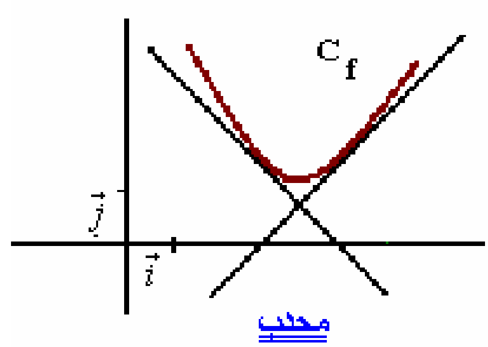
3-1 تعــريف

لـتكن f قابـلة للاشــتـــــقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته





ملاحظة

نفترض أن (C_f) محدب على مجال I نعتبر (T) ممـاسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.

لتكن M و P نقطتين لهـــــما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و (T)

لدينا (C_f) فوق (T) ومنه $\overline{PM} \geq 0$

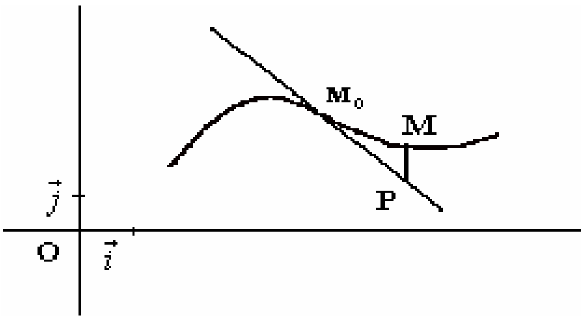
بالمثل اذا كان (C_f) مقعر فان $\overline{PM} \leq 0$

3-2 تعـــريف

لتكن f قابلة للاشـتــقاق على مجال I و (T) ممـاسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.

لتكن M و P نقطتين لهـــــما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و (T) إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0

و تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقـــــــطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-3 خــــاصيات

f دالة قابلة الاشــتــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت" f " موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I

* إذا كانت" f " سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I

* اذا كانت " f تـنعدم في x_0 من المــجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة " f على $[x_0, x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة " f على $]x_0-\alpha, x_0[$ فان $M_0(x_0;f(x_0))$ نقـطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظــــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشـتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

تمرين $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ و $g(x) = \dfrac{1-2x}{x^2 - x - 2}$

1- أدرس تقعر C_f و استنتج أن النقطة A ذات الأفصول 1 نقطة انعطاف للمنحنى C_f

2 - أدرس تقعر C_g و حدد نقط انعطاف المنحنى C_g

4- الفروع اللانهـــــائية

4-1 تعريف

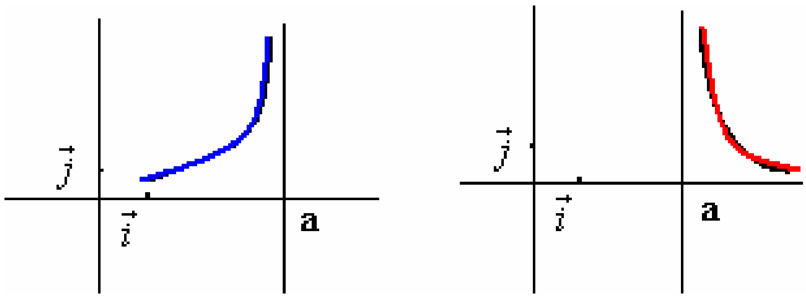
إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

4-2 مستقيم مقارب لمنحنى

أ- المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف

إذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب ل C_f



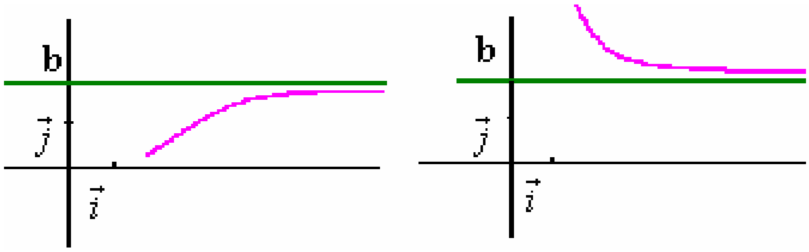
مثال $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ و منه المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى

ب- المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

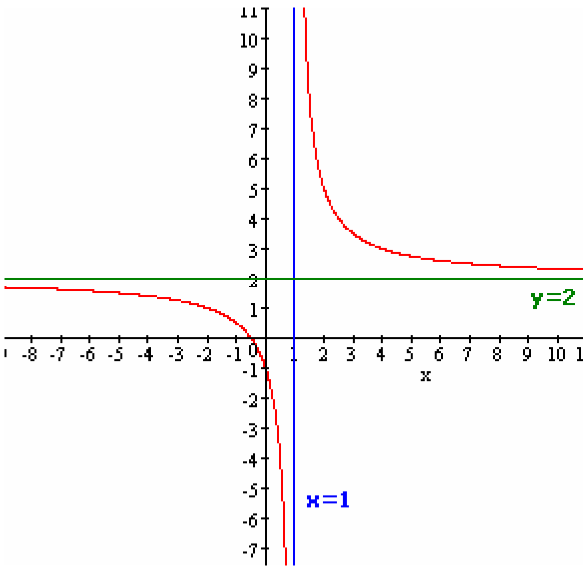
تعريف

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ فان المستقيم ذا المعادلة y =b مقارب ل C_f.



مثال $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و منه المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى



ج- المقارب المائل

تعريف

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

خاصة

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كانت توجد دالة h حيث يكون $f(x)=ax+b+h(x)$ و ($\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$)

مثال

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

لدينا $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x-1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى(بجوار $+\infty$)

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى(بجوار $-\infty$)

في كثير من الأحيان يصعب كتابة على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ حيث $\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=0$

تقنية تحديد مقارب مائل

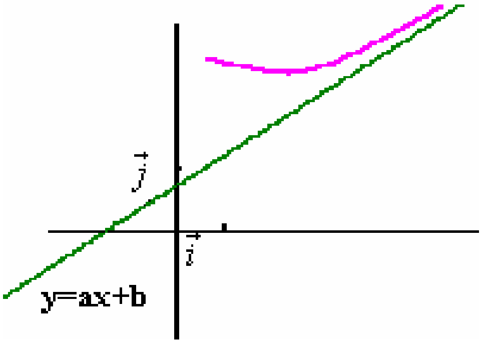
لنفترض أن $f(x)=ax+b+h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$

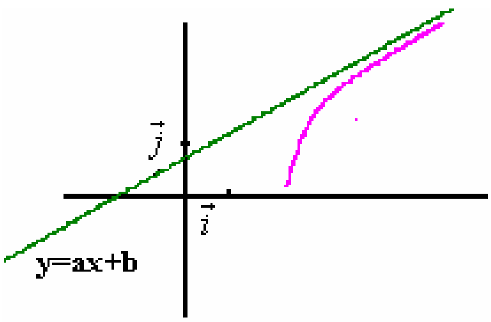
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x}h(x)\right)=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(b+h(x)\right)=b$$

عكسيا إذا كان $\left(\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right)$ فان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

مثال

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x-2}$$

حدد المقارب المائل بجوار $+\infty$ ثم بجوار $-\infty$

4-3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

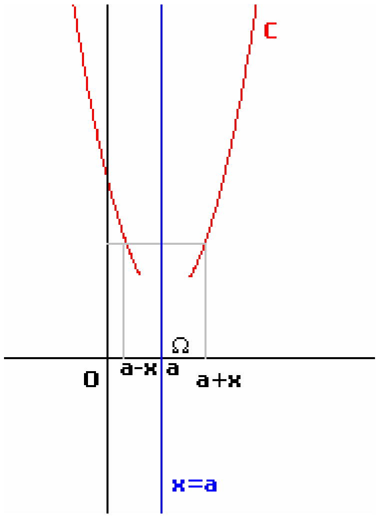
ج - إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

5 - مركز تماثل – محور تماثل

5-1 محور تماثل



اذا كان (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x = a$ كمحور تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(a;0)$

هي على شكل $Y = f(a+X) = \varphi(X)$ حيث φ دالة زوجية و $\begin{cases} X = x-a \\ Y = y \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X) = \varphi(X) \qquad \forall X \in D_\varphi$

أي $f(a-X) = f(a+X) \qquad \forall X \in D_\varphi$

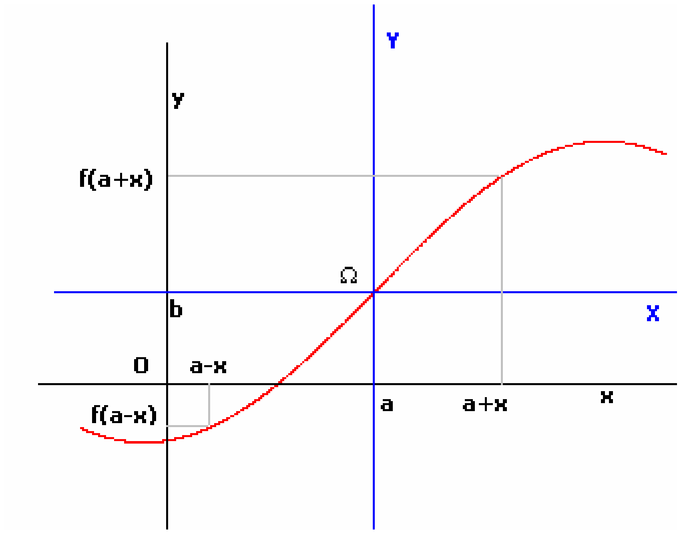
بما أن $X = x-a$ فان $f(2a-x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$

خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in D_f \qquad (2a-x) \in D_f \quad ; \quad f(2a-x) = f(x)$$

5-2 مركز تماثل



اذا كان (C_f) يقبل النقطة $\Omega(a;b)$ كمركز تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$

هي على شكل $Y + b = f(a+X)$

أي $Y = f(a+X) - b = \varphi(X)$

حيث φ دالة فردية و $\begin{cases} X = x-a \\ Y = y-b \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X) = -\varphi(X) \qquad \forall X \in D_\varphi$

أي $f(a-X) - b = -f(a+X) + b \qquad \forall X \in D_\varphi$

أي $f(a-X) = 2b - f(a+X) \qquad \forall X \in D_\varphi$

بما أن $X = x-a$ فان $f(2a-x) = 2b - f(x) \qquad \forall x \in D_f$

خاصية

في معلم ما,تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in D_f \qquad (2a-x) \in D_f \quad ; \quad f(2a-x) = 2b - f(x)$$

تمرين

1) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ بين أن المستقيم $(D): x=1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ بين أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

6- الدالة الدورية

6-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث

$$\forall x\in D_f \qquad x+T\in D_f\ ;\quad x-T\in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$$

العدد T يسمى دور الدالة f. أصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

أمثلة

* الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\sin x$ دوريتان و دورهما 2π
* الدالة $x\to\tan x$ دورية دورها π
* الدالتان $x\to\cos ax$ و $x\to\sin ax$ (حيث $a\neq 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$
* الدالة $x\to\tan ax$ (حيث $a\neq 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

تمرين

حدد دورا للدوال $x\to\cos x-\sin x$ و $x\to 3-\cos\dfrac{1}{4}x$ و $x\to\tan 3x$ و $x\to\cos^2 x$

6- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\qquad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f,\forall n\in\mathbb{Z}$

(نبين الخاصية بالاستدلال بالترجع)

6-3 التمثيل المبياني لدالة دورية

لتكن f دورية دورها T و (C_f) منحناها في مستوى منسوب ال معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن x_0 من D_f نعتبر $I_0=D_f\cap[x_0,x_0+T[$ و $I_n=D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$ حيث $n\in\mathbb{Z}$

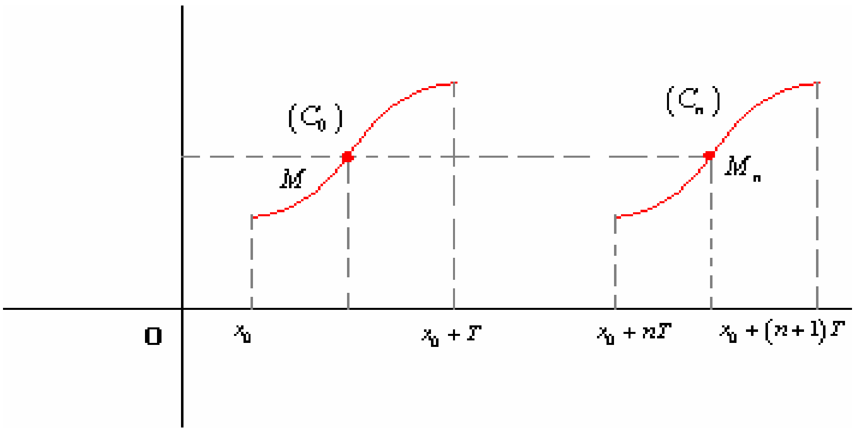
ليكن (C_0) قصور f على I_0 و (C_n) قصور f على I_n

ليكن $M(x;f(x))\in(C_0)$

لدينا اذن $x_0\le x\prec x_0+T$ و $x_0+nT\le x+nT\prec x_0+(n+1)T \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$ و $f(x+nT)=f(x)$

و بالتالي $M_n(x+nT;f(x))\in(C_n)$

$\overrightarrow{MM_n}=(x+nT)\vec{i}-x\vec{i}=nT\cdot\vec{i}$ و بالتالي صورة النقطة M بالإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ هي M_n من (C_n)



* عكسيا نعتبر $M_n(x;f(x))\in(C_n)$ و $x\in I_n$ أي $x_0+nT\le x\prec x_0+(n+1)T \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$

ومنه $x_0\le x-nT\prec x_0+T \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$ نعتبر $r=x-nT$

بما أن $x\in I_n$ و f دورية دورها T فان $r\in I_0$ و حيث $f(r)=f(x-nT)=f(x)$ أي $M(r;f(x))\in(C_0)$

$$\overrightarrow{MM_n} = x\vec{i} - (x - nT)\vec{i} = nT \cdot \vec{i}$$

إذن النقطة M_n من (C_n) هي صورة M من (C_0) بالإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$

خاصية

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f \cap [x_0 + nT; x_0 + (n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0, x_0 + T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

4-6 خاصية

f دالة دورية و T دورا نعتبر $I_0 = D_f \cap [x_0, x_0 + T[$ و $I_n = D_f \cap [x_0 + nT; x_0 + (n+1)T[$ f لها نفس منحنى التغييرات على المجموعتين I_0 و I_n لكل n من $\mathbb{Z}$

ملاحظة:

لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشائه جزئه على مجال من نوع $I_0 = D_f \cap [x_0, x_0 + T[$
استنتاج المنحنى باستعمال الإزاحة $t_{T n \vec{i}}$

أمثلة

* دالة $x \to \cos x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi; \pi]$
و حيث أن $x \to \cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0; \pi]$
$\forall x \in [0; \pi] \quad (\cos x)' = -\sin x$

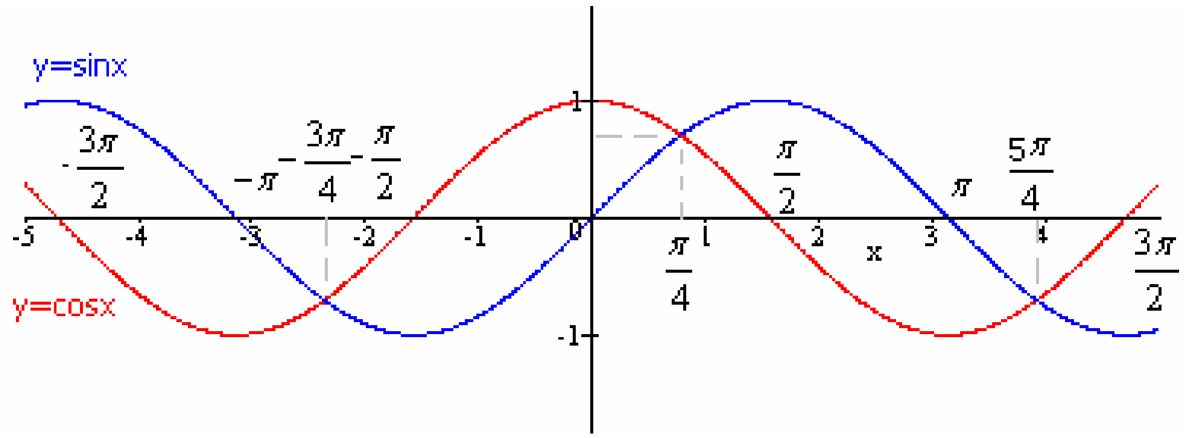
جدول التغيرات

x	0	π
$\cos x$	1 ↘	-1

دالة $x \to \sin x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi; \pi]$
و حيث أن $x \to \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $[0; \pi]$
$\forall x \in [0; \pi] \quad (\sin x)' = \cos x$

جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0



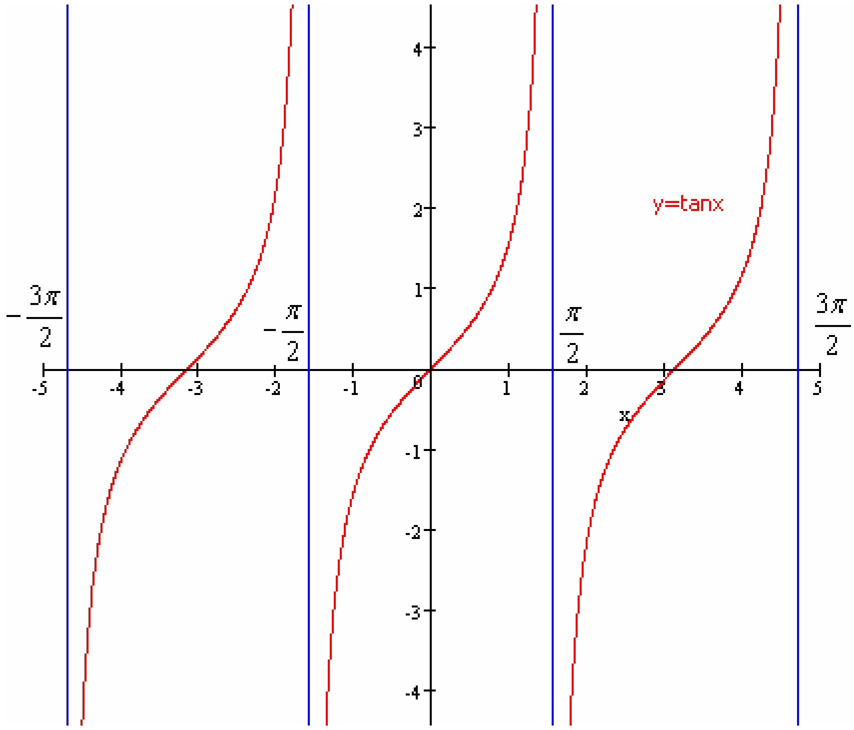
** دالة $x \to \tan x$ حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ و دورية ودورها π إذن يكفي دراستها على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

و حيث أن $x \to \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\qquad (\tan x)'=1+\tan^2 x$$

جدول التغيرات

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow +\infty$



تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية
- دراسة التقعر ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

تمرين

أدرس ومثل مبيانيا الدالة f في الحالات التالية

$$a): f(x)=x-3+\frac{1}{x-2} \qquad b): f(x)=\frac{2|x|}{x^2+1} \qquad c): f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$$