

ملخص للاشتقاق

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0
 نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{بـ } f'(x_0) \text{ العدد } l \text{ يسمى العدد المشتق لـ } f \text{ في } x_0 \text{ . نكتب}$$

$$\text{ملاحظة: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(ب) مثال: نعتبر $f(x) = x^2 + 2x$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

ج) الدالة التالفة المماسية لدالة

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

$$\text{لدينا } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{نضع } \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{، } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad / \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

الدالة $x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التالفة المماسية لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0
 إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن الدالة التالفة المماسية لدالة f في النقطة x_0 هي الدالة
 $g : x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x) = \sqrt{x}$

(1) حدد الدالة التالفة المماسية لدالة f في النقطة 1

(2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

2 - الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$
 نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 ونرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{العدد } l \text{ يسمى العدد المشتق لـ } f \text{ على اليمين في } x_0 \text{ نكتب}$$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 ونرمز لها بـ $f'_g(x_0)$.

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{العدد } l \text{ يسمى العدد المشتق لـ } f \text{ على اليسار في } x_0 \text{ نكتب}$$

ب - خاصة

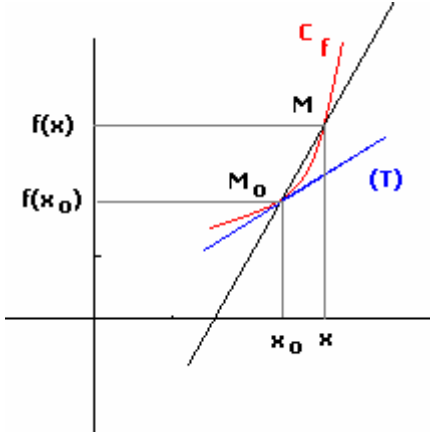
تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين نعتبر $f(x) = x^2 + |x|$ أدرس قابلية اشتقاق f في 0

3- الاشتقاق و الاتصال خاصة

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

ملاحظة: عكس هذه الخاصية غير صحيح (كما يوضح المثال السابق الدالة f متصلة في 0 و مع ذلك غير قابلة للاشتقاق في 0)



4- التأويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة أ- المماس

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0 و C_f منحناها نعتبر $M(x; f(x))$ و $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطتين من C_f

المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

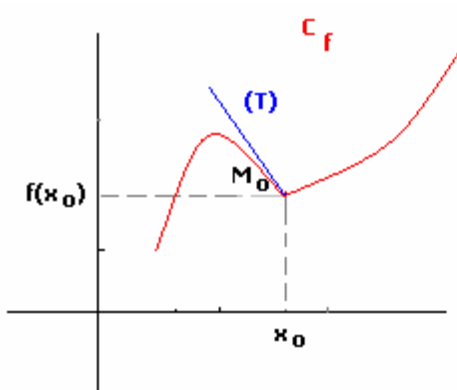
نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تؤول إلى x_0) فإن $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم (MM_0) يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجه $f'(x_0)$ المستقيم (T) مماس للمنحنى C_f

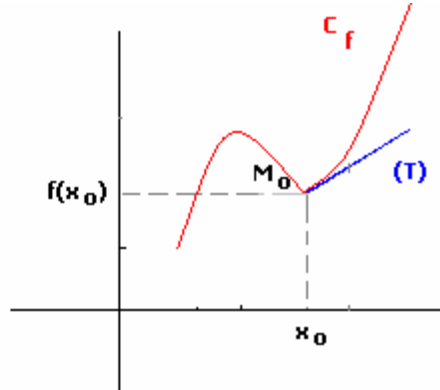
لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأضلاع x_0 معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

تمرين: نعتبر $f(x) = x^3$

أدرس قابلية اشتقاق f في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأضلاع 2

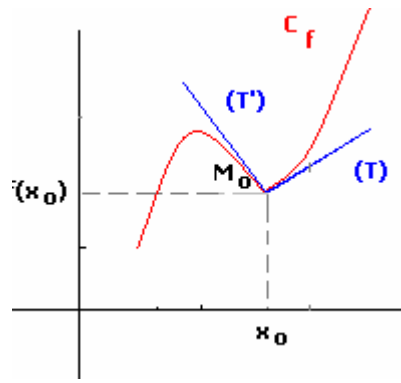


$$\begin{cases} (T): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

ب- نصف المماس



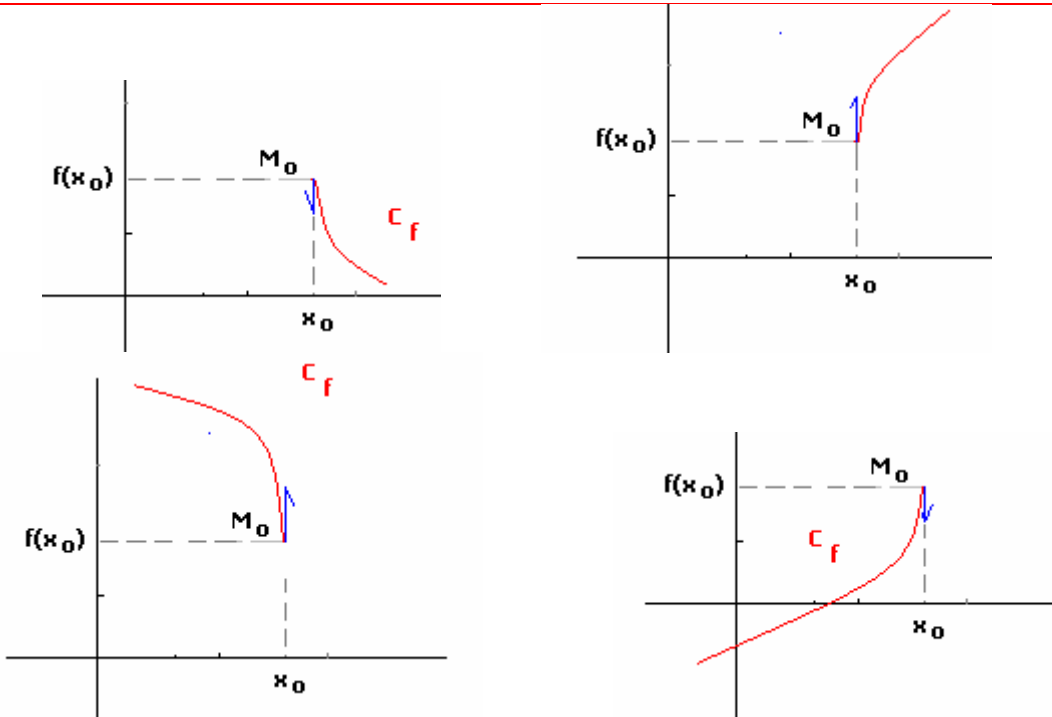
$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0) & x \geq x_0 \\ (T'): y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$$

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)

خاصية

إذا كانت f متصلة في x_0 (على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0) و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ فان C_f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0)



تمرين نعتبر $f(x) = |x^2 - 1|$ و $g(x) = \sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا
أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

5- الدالة المشتقة

أ- تعاريف

تعريف 1

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

تعريف 2

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a; b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ و على يمين a و على يسار b .

ملاحظة: بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a;b[$ و على $[a;b[$

تعريف 3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرسم لها بـ f' .

مثال: نعتبر $f(x) = x^2$

ندرس قابلية اشتقاق f و نحدد الدالة المشتقة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

ومنه قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) = 2x_0$

اذن f قابلة للاشتقاق في \mathbb{R} و $f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
إذا الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية
و نرسم لها بالرمز f''

مثال: نعتبر $f(x) = x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x \quad \text{رأينا أن} \quad \text{وحيث} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \quad \text{فان} \quad f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6- عمليات على الدوال المشتقة

- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$f + g$ و $f \times g$ و λf و f^n دوال قابلة للاشتقاق على المجال I

و اذا كانت g لا تنعدم على I فان $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$\forall x \in I$ بحيث g لا تنعدم على I

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x) \quad (\text{نبين ذلك بالترجع})$$

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

* الدالة $f: x \rightarrow x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

$$\begin{aligned} & f : x \rightarrow ax + b \text{ الدالة } * \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \text{ و } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \\ & n \in \mathbb{N}^* \quad f : x \rightarrow x^n \text{ الدالة } * \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1} \text{ و } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f : x \rightarrow \frac{1}{x} \text{ الدالة } * \\ \mathbb{R}^* \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}^* \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \\ \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ و} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ لتكن } f : x \rightarrow \sqrt{x} \text{ الدالة } * \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ و } \mathbb{R}_+^* \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}_+^* \text{ إذن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } 0 \\ & f : x \rightarrow \sin x \text{ الدالة } * \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2 \cos(x_0 + h) \right) \times 2 \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0 \end{aligned}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \text{ و } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad x \rightarrow \sin x$$

$$f : x \rightarrow \cos x \text{ الدالة } *$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x \text{ و } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad x \rightarrow \cos x$$

$$f : x \rightarrow \tan x \text{ الدالة } *$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \text{ إذن}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \text{ و}$$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في \mathbb{R}
* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التآلفية $x \rightarrow ax+b$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على J فان $g : x \rightarrow f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و

$$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax+b)$$

مثال: نعتبر $f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$

f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $f'(x) = 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

تمارين

1- أدرس اشتقاق f و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-x} * \quad f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} * \quad f(x) = \frac{5}{x^2} * \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 *$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} * \quad f(x) = (\cos x)^5 * \quad f(x) = (x^2 + x)^5 *$$

$$f(x) = x^2 + x|x| * \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases} *$$

2- نعتبر $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$
 ب- أكتب معادلتني هذين المماسيين.