

الحساب المثلثي

I- تذكير

وحدات قياس الزوايا لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان. **تعريف الراديان** الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .

نرمز لها بـ rd

$$\pi rd = 200gr = 180^\circ \quad (\text{gr : يرمز للград})$$

ملاحظة

نتيجة إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالград فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

قياس قوس هندسية قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR .

ملاحظة طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس هذه القوس.

II- الدائرة المثلثية - الأفصول المنحني - الزوايا الموجهة.

1- توجيه مستوى

لتكن (C) دائرة و I نقطة من هذه الدائرة .

لو أردنا أن ننطلق من I لنحيط حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحنيين .

توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحنيين منحى موجبا (أو مباشرا)

و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).

عادة نأخذ المنحني الموجب المنحني المعاكس لحركة عقارب الساعة .

النقطة I تسمى أصل الدائرة (C).

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيهها موحدنا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها 1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيهها موجبا.

3- الأفصول المنحني لنقطة على الدائرة المثلثية

أ- تعريف

نعتبر دائرة مثلثية (C) أصلها I. و لتكن M نقطة من (C)

ليكن α طول القوس الذي طرفاه I و M بالذهاب من I إلى M في المنحني الموجب

$$(\widehat{IOM} = \alpha \quad ; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi)$$

الحالة 1

إذا أردنا الذهاب من I إلى M على (C) في المنحني الموجب فإننا سنصل إلى M للمرة الأولى

عند قطع مسار طوله α وإذا تابعنا التحرك فإننا سنصل إلى M للمرة الثانية عند قطع مسار طوله $\alpha + 2\pi$ (لأن محيط الدائرة هو 2π) و في المرة الثالثة فإننا سنصل إلى M عند قطع مسار طوله

$\alpha + 4\pi = \alpha + 2(2\pi)$ وفي المرة $k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) سنصل إلى M عند قطع مسار طوله

$$\alpha + 2k\pi$$

الحالة 2

إذا أردنا الذهاب من I إلى M على (C) في المنحني السالب فإننا سنصل إلى M للمرة الأولى عند

قطع مسار طوله $2\pi - \alpha$ وإذا تابعنا التحرك فإننا سنصل إلى M للمرة الثانية عند قطع مسار طوله

$4\pi - \alpha$ وفي المرة k' ($k' \in \mathbb{N}^*$) سنصل إلى M عند قطع مسار طوله $-\alpha + 2k'\pi$.

لكي نميز بين هاتين الحالتين للتنقل من I إلى M ، نقول إننا قطعنا مسارا طوله (أو قياسه)

$$\alpha + 2k\pi$$

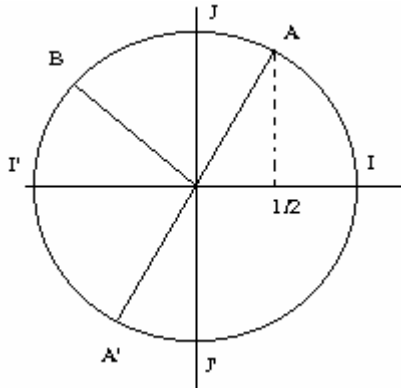
في الحالة الأولى، ومسارا طوله $(-\alpha + 2k'\pi)$ أي $\alpha - 2(-k')\pi$ في الحالة الثانية .

و في كلتا الحالتين فان قياس المسار للذهاب من I إلى M هو $\alpha + 2\lambda\pi$ $\lambda \in \mathbb{Z}$

تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I.

و ليكن α طول القوس الذي طرفاه I و M بالذهاب من I إلى M في المنحنى الموجب. كل عدد يكتب على الشكل $\alpha + 2k\pi$ بحيث k عنصر من \mathbb{Z} يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.



تمرين
(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفصائل المنحنية للنقط
B; A'; A; J'; J; I'; I

تمرين

(C) دائرة مثلثية أصلها I . نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحنى لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات و تعريف

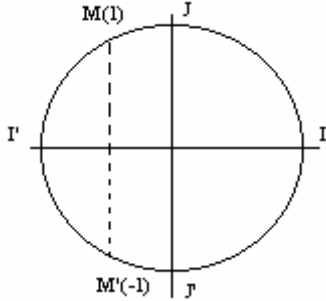
خاصية

- إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فإنه يوجد عنصر λ من \mathbb{Z} بحيث $x - y = 2\lambda\pi$ و نكتب $[2\pi]$ $x \equiv y$ و نقرأ x يساوي y بتريديد 2π .
- إذا كان x أفصول منحنى للنقطة M فإن جميع الأفصائل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تعريف

يوجد أفصول منحنى وحيد للنقطة M ينتمي إلى المجال $]-\pi; \pi]$ يسمى الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M.

ملاحظة



إذا رمزنا للأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M بالرمز α و رمزنا لطول القوس $[IM]$ بالعدد الموجب l فان :
* $\alpha = l$ إذا كانت M تنتمي إلى نصف الدائرة $[IJ'I']$
* $\alpha = -l$ إذا كانت M تنتمي إلى نصف الدائرة $[IJI']$

تمرين حدد الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة التي إحدى أفصائلها المنحنية $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

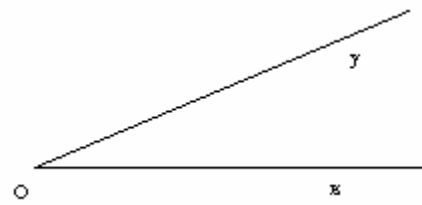
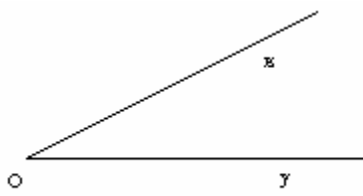
تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $C; B; A$ التي أفصائلها المنحنية على التوالي هي 7π ; $\frac{37\pi}{3}$; $\frac{-108\pi}{12}$

تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفصائلها المنحنية $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

4- الزاوية الموجبة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

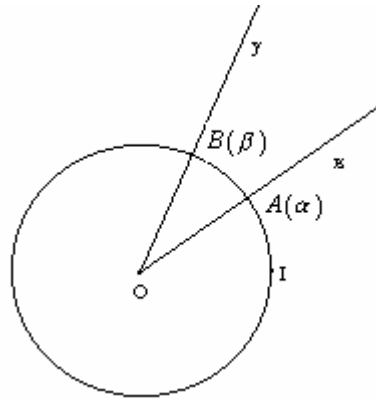
ليكن $[O; x[$ و $[O; y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل الزوج $([O; x[; [O; y[)$ يحدد زاوية موجبة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox; Oy})$



ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم تعريف وخاصة

لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم، و (C) دائرة مثلثية مركزها O ، و A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي مستقيم $[O;x]$ و $[O;y]$ على التوالي ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي . كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta - \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $(\overline{Ox;Oy}) = \beta - \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ و نكتب أيضا $(\overline{Ox;Oy}) \equiv \beta - \alpha \quad [2\pi]$



خاصة و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi; \pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصة

إذا كان θ قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فإن $\theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ قياس للزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.

إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فإن $\alpha - \beta \equiv 0 \quad 2\pi$ أي $(k \in \mathbb{Z} / \alpha - \beta = 2k\pi)$

ملاحظات

* إذا كانت M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فإن الأفاصل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{OI;OM})$

* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ هي قياس الزاوية الهندسية (\widehat{xOy}) .

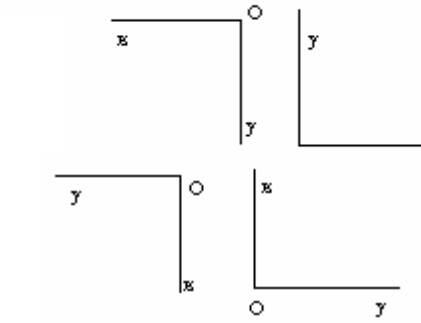
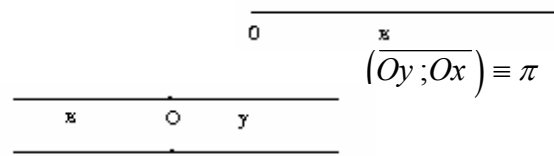
بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة

$$(\overline{Ox;Ox}) \equiv 0 \quad [2\pi]$$

الزاوية المستقيمة

$$(\overline{Ox;Oy}) \equiv \pi \quad [2\pi] \quad (\overline{Oy;Ox}) \equiv \pi \quad [2\pi]$$



$$(\overline{Ox;Oy}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad (\overline{Oy;Ox}) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

الزاوية القائمة موجبة

$$(\overline{Ox;Oy}) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

الزاوية القائمة سالبة.

تمرين 1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

$$47\pi ; -36\pi ; \frac{52\pi}{5} ; -\frac{25\pi}{3}$$

3- أنشئ زاوية موجهة $(\overline{Ox;Oy})$ قياسها $-\frac{234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ مثلث متساوي الأضلاع حيث $(\overline{AB;AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$$(\overline{Ox;Oy}) + (\overline{Oy;Oz}) \equiv (\overline{Ox;Oz}) \quad [2\pi]$$

نتائج

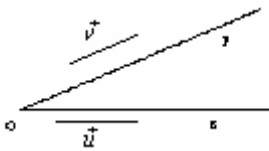
* إذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $(\overline{Ox;Oy}) \equiv -(\overline{Oy;Ox}) \quad [2\pi]$

* إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $(\overline{Ox;Oy}) \equiv (\overline{Ox;Oz}) \quad [2\pi]$

فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه إذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد

$$[O;y[\text{ بحيث } (\overline{Ox;Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$$



د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه .

و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجحين

على التوالي بالمتجهتين \vec{u} و \vec{v} .

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u};\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\overline{Ox;Oy})$ و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ هي مجموعة قياسات الزاوية $(\overline{Ox;Oy})$. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) \equiv (\overline{Ox;Oy}) \quad [2\pi]$

تمارين

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصلها

$$F\left(\frac{-17\pi}{3}\right) \quad E\left(\frac{23\pi}{4}\right) \quad B\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad A(\pi)$$

أعط قياسا لكل من الزاوية التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهم

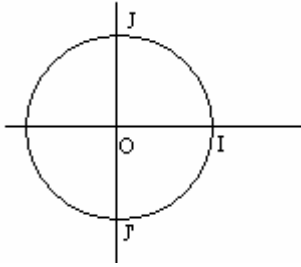
$$\left(\overline{OE};\overline{OF}\right) ; \left(\overline{OA};\overline{OE}\right) ; \left(\overline{OB};\overline{OA}\right) ; \left(\overline{OA};\overline{OA}\right)$$

5- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I. ولتكن J من (C) بحيث زاوية قائمة

موجبة

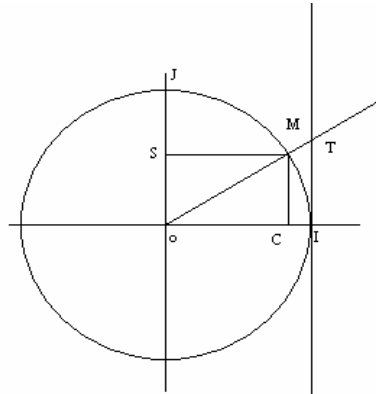
المعلم $(O;\overline{OI};\overline{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).



لتكن J' من (C) بحيث زاوية قائمة سالبة .

المعلم $(O;\overline{OI};\overline{OJ}')$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

III- الدوال المثلثية



1- النسب المثلثية

تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O;\overline{OI};\overline{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيها لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي \overline{OC} أفصول النقطة M في المعلم $(O;\overline{OI};\overline{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x

$$\text{نكتب } \cos x = \overline{OC}$$

*- العدد الحقيقي \overline{OS} أرتوب النقطة M في المعلم $(O;\overline{OI};\overline{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x .

$$\text{نكتب } \sin x = \overline{OS}$$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I. لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

العدد الحقيقي \overline{IT} هو ظل العدد الحقيقي x. نكتب $\tan x = \overline{IT}$

ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفصول منحنى لنقطة M فان $M(\cos x; \sin x)$
- الدالة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها \mathbb{R} يرمز لها بـ \cos
- الدالة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها \mathbb{R} يرمز لها بـ \sin
- الدالة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ يرمز لها بـ \tan

2- خاصيات

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad -*$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنى لنفس النقطة M

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

- مهما كانت $M(x + k\pi)$ لدينا \overline{IT}

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{حالة خاصة}$$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \text{➤}$$

أن الدالة

\sin فردية.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(-x) = -\tan x \quad \text{➤}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{➤}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{➤}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{➤}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \text{➤}$$

3 - نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

1 تمرين أحسب $\cos \frac{34\pi}{3}$; $\cos \frac{-37\pi}{4}$; $\sin \frac{53\pi}{6}$; $\sin \frac{-7\pi}{2}$

2 تمرين أ- حدد $1 + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos \frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$

خاصية

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث و r شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث و S و p مساحة و محيط المثلث على التوالي. نضع $BC = a$ $AC = b$ $AB = c$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{pr}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} cb \sin \hat{A}$$

$$S = \sqrt{\frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a\right) \left(\frac{P}{2} - b\right) \left(\frac{P}{2} - c\right)} \quad (\text{صيغة هيرون})$$

المعادلات و المتراجحات المثلثية

I- المعادلات المثلثية

-1 المعادلة $\cos x = a$

مثال 1 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $x = \frac{1}{2}$: Δ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين

الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفصول المنحنية للنقطة M و $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي

الأفصول المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

مثال 2 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in [-2\pi; 2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 2\pi]$ فإن $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ أو

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0\} \quad \text{لدينا}$$

$$x = -\frac{5\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow k \in \{1; 0\} \quad \text{لدينا}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \quad \text{إذن}$$

خلاصة المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلاً إذا كان $a < -1 \vee a > 1$

$$k \in \mathbb{Z} / x = 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \cos x = 1$$

$$k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \cos x = -1$$

إذا كان $-1 < a < 1$ فإن يوجد عنصر α من $]0; \pi[$ حيث $\cos \alpha = a$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة $\cos x = a$ في \mathbb{R} هي

$$S = \{ \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$$

تمرين حل المعادلات

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) \quad x \in]-\pi; 3\pi[\quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x \in [\pi; 2\pi[\quad 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

-2 المعادلة $\sin x = a$

$$x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{حل} \quad \text{مثال 1}$$

لدينا المستقيم $\Delta: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين

$$\text{الرئيسيين على التوالي هما } \frac{\pi}{3} \text{ و } \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفصول المنحنية للنقطة M و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي

الأفصول المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in [-2\pi; 3\pi[\quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{حل} \quad \text{مثال 2}$$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل

$$\text{على } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 3\pi]$ فإن $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi$ أو

$$-2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{8}{6} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\} \quad \text{لدينا}$$

$$x = -\frac{5\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$-2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \Leftrightarrow -\frac{8}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow k \in \{-1; 1; 0\} \quad \text{لدينا}$$

$$x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{8\pi}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right\} \quad \text{إذن}$$

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلاً إذا كان $a < -1$ \vee $a > 1$

$$k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \sin x = 1$$

$$k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \sin x = -1$$

إذا كان $-1 < a < 1$ فإن يوجد عنصر α من $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ حيث $\sin \alpha = a$

والتالي مجموعة حلول المعادلة $\sin x = a$ في \mathbb{R} هي

$$S = \{ \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) \quad \text{تمرين حل المعادلات}$$

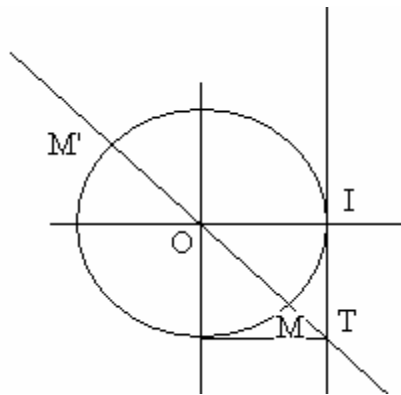
$$x \in]-\pi; 3\pi] \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x \in]-\pi; 2\pi] \quad 4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0$$

-3 المعادلة $\tan x = a$

حل المعادلة $\tan x = -1$ $x \in \mathbb{R}$

نعتبر Δ المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ، نأخذ النقطة T من Δ حيث $\overline{IT} = -1$



المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C) في النقطتين M و M' نعلم أن $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحنى للنقطة M

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ فان } \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + k\pi) = \tan x \quad \text{وبما أن}$$

خاصة

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \tan x = a \text{ حل للمعادلة } \alpha \text{ حيث } \tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

تمرين حل المعادلتين

$$x \in [0; 3\pi] \quad \tan 2x = \sqrt{3}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$$

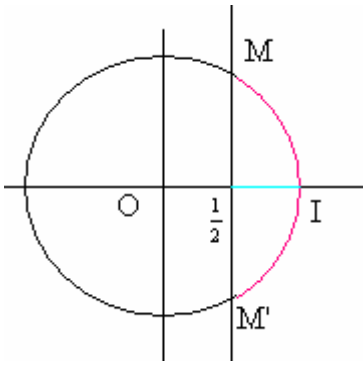
II- المتراجحات المثلثة

مثال 1

$$x \in]-\pi; \pi] \quad \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ حل}$$

$$x \in]-\pi; \pi] \quad \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$$

لتكن $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية



مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي الى القوس

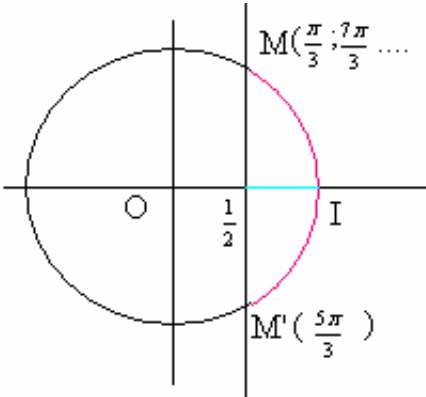
$$S = \left[\frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \text{ وهذه المجموعة هي } \widehat{M'IM} \text{ في }]-\pi; \pi]$$

$$x \in [0; 3\pi[\quad \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ حل } \underline{\text{مثال 2}}$$

$$x \in [0; 3\pi[\quad \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

و $\frac{7\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ أفصولين منحنين لنفس النقطة M ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة M'



مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي الى القوس

$$\widehat{M'IM} \text{ في }]-\pi; \pi]$$

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \text{ وهذه المجموعة هي}$$

تمرين

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x < 1 \quad , \quad x \in [0; 4\pi] \quad \sin x > \frac{-1}{2} \quad , \quad x \in]-\pi; \pi] \quad \sin x > \frac{-1}{2} \text{ حل}$$

متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات أساسية

تمرين

$$x \in [0; \pi] \quad \tan 3x > \sqrt{3} \quad , \quad x \in]-\pi; \pi] \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2} \text{ حل}$$

$$x \in]-\pi; \pi] \quad \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0 \quad , \quad x \in]-\pi; \pi] \quad 4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$