الفلكـــة

I- معادلة فلكة

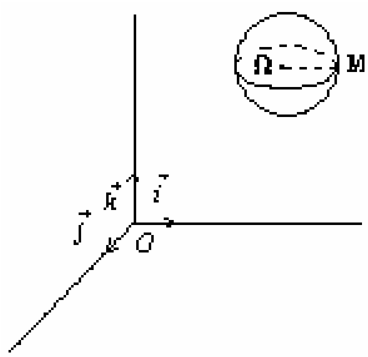
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

1-معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها

لتكن $\Omega(a;b;c)$ نقطة من الفضاء (E) و $r\in\mathbb{R}^{*+}$ و$S(\Omega;r)$ الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r

ليكن$M(x;y;z)$ من الفضاء (E)

$M\in S(\Omega;r) \Leftrightarrow \Omega M=r \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$



مبرهنة

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega;r)$ التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r

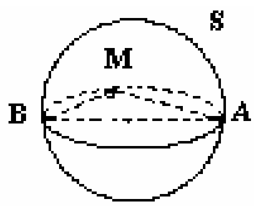
هي $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ملاحظات و اصطلاحات

* إذا كان A و B نقطتين من الفلكة $S(\Omega;r)$ حيث Ω منتصف [A;B] فان [A;B] قطرا للفلكة
* توجد فلكة وحيدة أحد أقطارها [A;B] مركزها Ω منتصف [A;B] و شعاعها $r=\frac{1}{2}AB$
* للفلكة $S(\Omega;r)$ معادلة ديكارتية من شكل $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ حيث α و β و γ وδ أعداد حقيقية.
* الفلكة $S(O;r)$ حيث O أصل المعلم معادلتها $x^2+y^2+z^2=r^2$
* الكرة لتكن $S(\Omega;r)$ فلكة التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r

الكرة $B(\Omega;r)$ التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leq r^2$

2- معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها



S فلكة أحد اقطارها [A;B]

$M\in S \Leftrightarrow$ [AMB] زاوية قائمة أو M=A أو M=B $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

مبرهنة

A و B نقطتان مختلفان في الفضاء

في الفضاء مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي فلكة التي أحد اقطارها [A;B]

خاصة

اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين مختلفتين فان معادلة الفلكة التي أحد اقطارها $[A;B]$ هي $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر $\Omega(1;2;-1)$ و $A(2;1;2)$ و $B(4;1;2)$

1- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S التي مركزها Ω و المار من A

2- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S´ التي قطرها [A;B]

3- دراسة المعادلة $(1):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

لتكن E مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق المعادلة (1)

$M\in E \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d$

لتكن $\Omega(a;b;c)$

*- إذا كان $a^2+b^2+c^2-d<0$ فان $E=\emptyset$

*- اذا كان $a^2+b^2+c^2-d=0$ فان $E=\{\Omega\}$

*- اذا كان $a^2+b^2+c^2-d>0$ فان $E=S(\Omega;r)$ حيث $a^2+b^2+c^2-d=r^2$

مبرهنة

a و b و c و d أعداد حقيقية

تكون مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

فلكة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$

ملاحظة يمكن اعتبار E={Ω} فلكة مركزها Ω و شعاعها منعدم

تمرين نعتبر E مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+5=0$

بين إن E فلكة محددا عناصرها المميزة

تمرين حدد مجموعة النقط M التي تحقق $2MA^2+3MB^2=16$ حيث $A(2;0;-1)$ و $B(-1;1;-1)$

II – تقاطع مستوى و فلكة

1- دراسة تقاطع للفلكة S(Ω;r) و المستوى (P)

ننسب الفضاء إلى معلم متعامد ممنظم $(A;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ حيث A المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P)

و $(A;\vec{u};\vec{v})$ م.م.م لـ (P)

$\vec{w}$ متجهة واحدية موجهة للمستقيم (AΩ)

Ω تنتمي إلى محور الاناسيب ومنه يوجد c حيث $\Omega(0;0;c)$

معادلة المستوى (P) بالنسبة للمعلم $(A;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ هي $z=0$ و معادلة الفلكة S هي $x^2+y^2+(z-c)^2=r^2$

$d(\Omega;(P))=|c|$

لدينا $M(x;y;z)\in (P)\cap S \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-c)^2=r^2$ و $z=0$

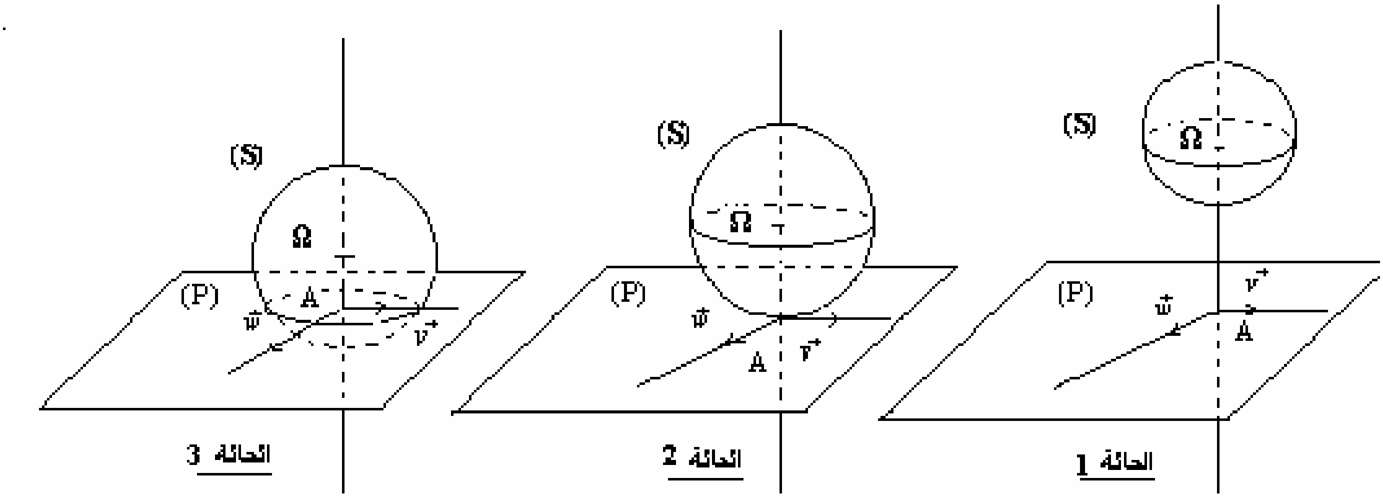
$\Leftrightarrow x^2+y^2=r^2-c^2$ و $z=0$

ومنه تقاطع S و (P) مرتبط بحل المعادلة $x^2+y^2=r^2-c^2$ بالنسبة للمعلم $(A;\vec{u};\vec{v})$

*<u>الحالة1</u> إذا كان $d(\Omega;(P))>r$ فان $(P)\cap S = \emptyset$

*<u>الحالة2</u> إذا كان $d(\Omega;(P))= r$ فان $(P)\cap S = \{A\}$

*<u>الحالة 3</u> إذا كان $d(\Omega;(P))< r$ فان $(P)\cap S = (C)$ حيث (C) الدائرة التي مركزها A وشعاعها $\sqrt{r^2-c^2}$



<u>مبرهنة</u>

ليكن (P) مستوى في الفضاء و S فلكة مركزها Ω و شعاعها r

يكون تقاطع (P) و S :

* دائرة مركزها A المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P) و شعاعها $\sqrt{r^2-d^2(\Omega,(P))}$

اذا كان $d(\Omega;(P))< r$

* دائرة نقطة اذا كان $d(\Omega;(P))= r$

* المجموعة الفارغة اذا كان $d(\Omega;(P))>r$

2- <u>مستوى مماس لفلكة في أحد نقطها</u>

<u>تعريف</u>

لتكن A نقطة من الفلكة $S(\Omega;r)$

نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة S عند النقطة A اذا كان (P) عمودي على (ΩA) في A

<u>خاصية</u>

لتكن A نقطة من الفلكة $S(\Omega;r)$

(P) مماس على $S(\Omega;r)$ في A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ $\forall M\in(P)$

<u>تمرين</u> في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر S_1 الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ و S_2 الفلكة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2 , و (P) المستوى الذي معادلته $x-2y+z+1=0$ و (P´) المستوى الذي معادلته $2x-y-2z-1=0$.

1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.

2- أدرس تقاطع (P´) و S_2 .

-3 حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S_1 عند النقطة A(1;1; 3)

إجابة

-1 $S_1 :\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ اذن $S_1 = S(\Omega_1;3)$ حيث $\Omega_1(2;-1;1)$

$$d(\Omega_1;(P))=\frac{|2+2+1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}\prec 3$$

(P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة مركزها B مسقط العمودي لـ Ω_1 على (P) و شعاعها $\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$

B هو تقاطع المستوى (P) و المستقيم (D) المار من Ω_1 و العمودي على (P)

لدينا $\vec{n}(1;-2;1)$ منظمية على (P) و منه موجهة لـ (D) و بالتالي التمثيل البارامتري لـ (D) هو

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$B\in(P)\cap(D)\Leftrightarrow\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=1+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=-1 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

اذن تقاطع (P) و S_1 هو الدائرة $C(B;\sqrt{3})$ حيث B(1;1;0)

-2 لدينا $d(\Omega_2;(P'))=2$ ومنه تقاطع S_2 و (P´) هو النقطة C باتباع نفس الخطوات السابقة نحدد النقطة C

-3 لدينا $A\in S_1$ ليكن (P´´) مماس لـ S_1 عند A

$$M(x;y;z)\in(P'')\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}\Leftrightarrow\text{........................}$$

3-- تقاطع مستقيم و فلكة

مثال نعتبر $S :\ x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$

$$(D_1):\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = -3+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_2):\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D_3):\begin{cases} x = \frac{-1}{2}+2t \\ y = \frac{1}{3}+3t \\ z = -2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

حدد تقاطع S مع كل من (D_1) و (D_2) و (D_3)

تمارين

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر A(1;0;1) و B(0;0;1) و C(0;-1;1) و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$

1- بين أن مجموعة النقط M حيث MA=MB=MC مستقيم وحدد تمثيلا بارا متريا له

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C

3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من Aو B و المماسة لـ (D) في C

تمرين2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر A(0;3;-5) و B(0;7;-3)

و C(1;5;-3)

1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منظمية عليه

3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة x+y+z=0

أ- تأكد أن (P)و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D)

ب- حدد تمثيلا بارا متريا لـ (D)

4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ $\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$

أ- حدد معادلة للفكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)

ب حدد تقاطع S و (AC)

تمرين3

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 (D) المستقيم الممثل بارا متريا بـ $\begin{cases} x = 3t \\ x = -2-3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2+4t \end{cases}$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)

3- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))

4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0

و (D) المستقيم المعرف بـ $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

تمرين5

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة x+y+z+1=0

و المستوى (Q) ذا المعادلة 2x-2y-5=0

و (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$

1- بين أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها

2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعهما

3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A(0;1;2) و العمودي على (P)

4- تحقق أن $(P)\perp(Q)$ و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D´)تقاطع (P) و(Q)

تمرين6

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطة A(-2;3;4)

المستوى (P) ذا المعادلة x+2y-2z+15=0 (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التيتحقق

$x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$ و (C) الدائرة التي معادلتها $\begin{cases} x^2+y^2-2x-8=0 \\ z=0 \end{cases}$

1- بين أن (S) فلكة محددا عناصرها المميزة

2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حددها

3- حدد معادلتي المستوين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)

4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)