ملخص دراسة الدوال

1 - الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتـــــقاق على مجال I

تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط اذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة (قطعا) على المجال I

تكون f تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة (قطعا) على المجال I

تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على المجال

2- قابلية الاشتقاق و المطارف

مبرهنة

لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$

اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

ملاحظة: المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية (مثال مضاد $f(x) = x^3$; $x_0 = 0$)

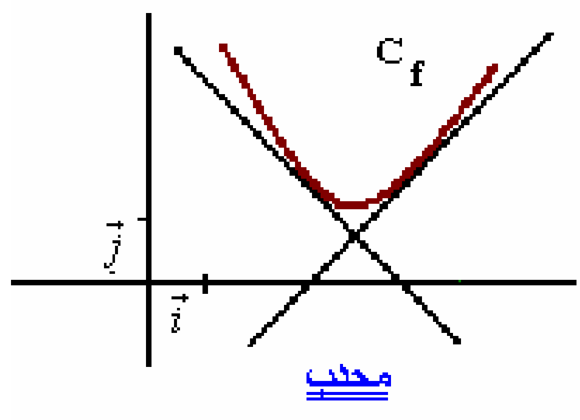
1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

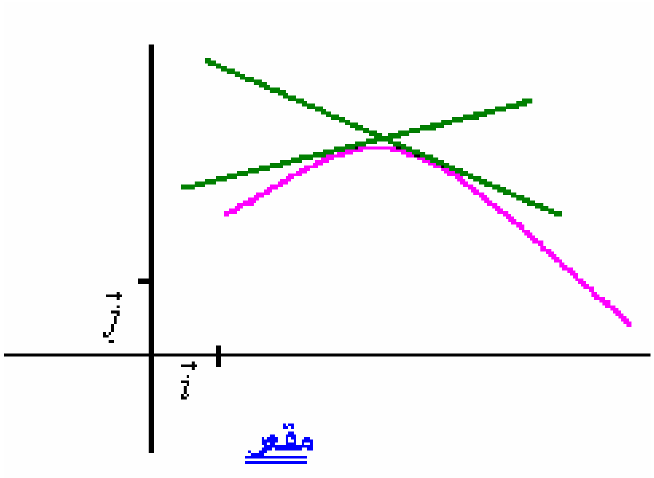
1-1 تعريف

لتكن f قابلة للاشتـــــقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته



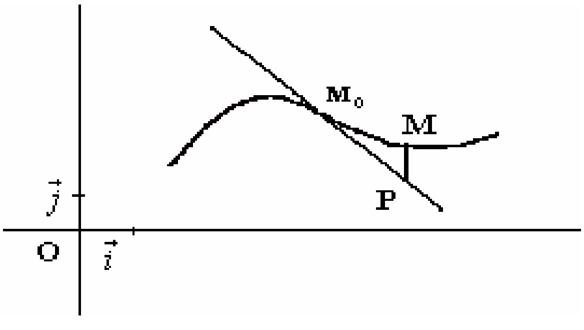


2-1 تعريف

لتكن f قابلة للاشتـــقاق على مجال I و (T) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.

لتكن M و P نقطتين لهـــما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و (T) إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0

و تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقـــــطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-1 خـــاصيات

f دالة قابلة الاشتـــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت f'' موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I
* إذا كانت f'' سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I
* اذا كانت f'' تـنعدم في x_0 من الــمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة f'' على $[x_0,x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة f'' على $]x_0-\alpha,x_0[$ فان $M_0(x_0;f(x_0))$ نقطـة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظـــــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشـتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

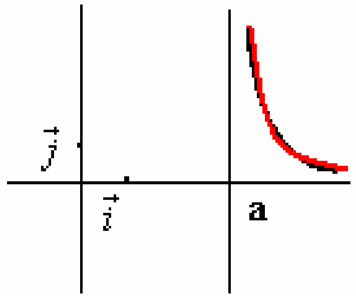
- الفروع اللانهـــــائية

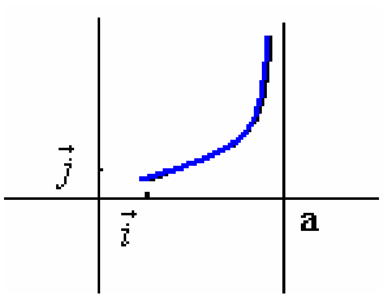
1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

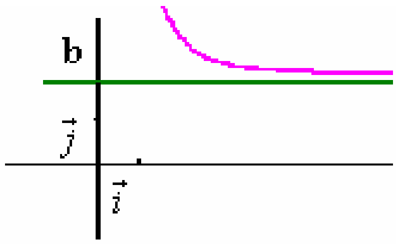
2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

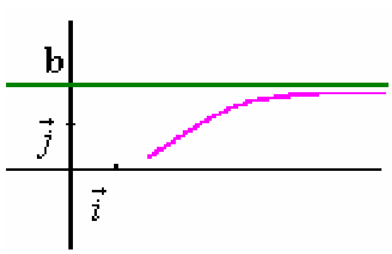
* اذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب ل C_f





* اذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة $y=b$ مقارب ل C_f.





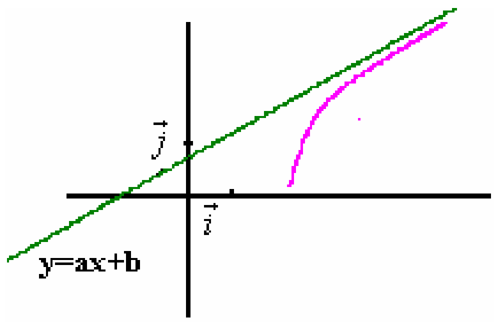
** يكون المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

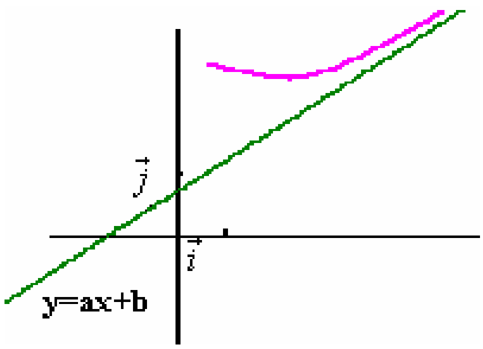
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$$

خا صية

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-ax\right) = b\right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-ax\right) = b\right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

2-3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3-1 خاصة

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$\forall x\in D_f \qquad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=f(x)$

3-2 خاصة

في معلم ما,تكون النقطة E (a ;b) مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$\forall x\in D_f \qquad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=2b-f(x)$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث

$\forall x\in D_f \qquad x+T\in D_f \;;\quad x-T\in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$

العدد T يسمى دور الدالة f. اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

4- 2 خاصة

إذا كانت للدالة f دور T فان $\quad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f ,\forall n\in\mathbb{Z}$

4-3 خاصة

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$ هو صورة منحنى الدالة على $D_f\cap[x_0,x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسبي.

4-4 خاصة

f دالة دورية و T دورا لها نعتبر $I_0=D_f\cap[x_0,x_0+T[$ و $I_n=D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$

f لها نفس منحى التغييرات على المجموعتين I_0 و I_n لكل n من $\mathbb{Z}$

أمثلة

دالة $x\to\cos x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi;\pi]$

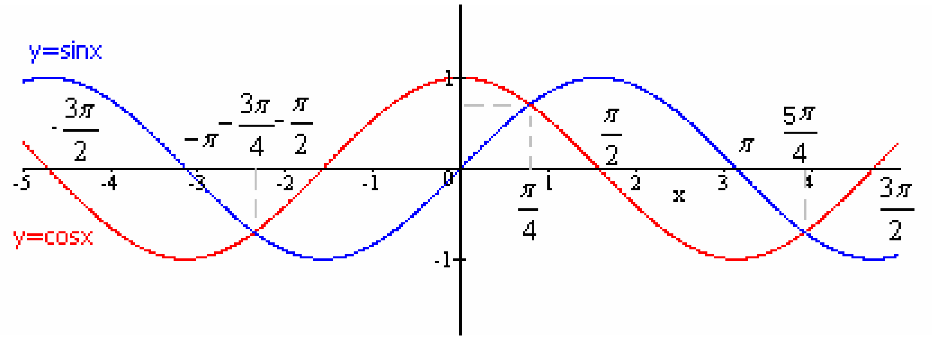
و حيث أن $x\to\cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0;\pi]$

جدول التغيرات

x	0 $\qquad\qquad$ π
$\cos x$	1 $\searrow$ -1

دالة $x \to \sin x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi;\pi]$
و حيث أن $x \to \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $[0;\pi]$
جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1	↘ 0



دالة $x \to \tan x$ حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ و دورية ودورها π إذن يكفي دراستها على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
و حيث أن $x \to \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$
جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0 ↗	$+\infty$