# ملخص للاشتقاق

## I- الاشتقاق في نقطة -الدالة المشتقة

### 1- الاشتقاق في نقطة

#### أ- تعريف

لتكن $f$ دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه $x_0$

نقول إن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ اذا كانت للدالة $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية $l$ في $x_0$ ونرمز لها بـ $f'(x_0)$ . العدد $l$ يسمى العدد المشتق لـ $f$ في $x_0$. نكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

#### ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في $x_0$ تكون متصلة في $x_0$

### 2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

#### أ- تعريف

* لتكن $f$ دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha \succ 0$

نقول إن $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0$ إذا كانت للدالة $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية $l$ على اليمين في $x_0$ و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$ .

العدد $l$ يسمى العدد المشتق لـ $f$ على اليمين في $x_0$ نكتب $f'_d(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن $f$ دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha \succ 0$

نقول إن $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0$ إذا كانت للدال $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية $l$ على اليسار في $x_0$ نرمز لها ب $f'_g(x_0)$ .

العدد $l$ يسمى العدد المشتق لـ $f$ على اليسار في $x_0$ نكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

#### ب – خاصية

تكون $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ إذا وفقط إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في $x_0$ والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

### 3- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

#### أ- المماس

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه $x_0$ و $C_f$ منحناها

قابلية اشتقاق $f$ في $x_0$ تؤول هندسيا بوجود مماس لـ $C_f$ عند النقطة ذات الأفصول $x_0$ معادلته
$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

#### ب- نصف المماس

خاصية

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0$ ( أو على اليسار في $x_0$ ) فان $C_f$ يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول $x_0$ معامله الموجه $f'_d(x_0)$ ( أو $f'_g(x_0)$ )

**خاصية**

إذا كانت $f$ متصلة في $x_0$ ( على اليمين في $x_0$ أو على اليسار في $x_0$ ) و كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فان $C_f$ يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول $x_0$ ( نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول $x_0$ )

## 4- الدالـــة المشتقة

### أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

الدالة التي تربط كل عنصر $x$ من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ $f'$ .

### ب- عمليات على الدوال المشتقة

-* لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ $\forall x \in I$ بحيث $g$ لا تنعدم على I

-* لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\forall x \in I \qquad \left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x)$$

- لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ و $n \in \mathbb{Z}_-^*$ و $f$ لا تنعدم على $I$

$$\forall x \in I \qquad \left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x)$$

- لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$

الدالة $g$ حيث $g(x) = f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق و $g'(x) = af'(ax+b)$

- لتكن $f$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال $I$

الدالة $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$

و $$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

### ج- المشتقة الثانية

نعتبر f قابلة للاشتقاق على المجال I

إذا كانت 'f قابلة للاشتقاق علىI فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

نرمز لها بـ: "f

## جدول مشتقات بعض الدوال

| $D_{f'}$ | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $0$ | $a$ |
| $\mathbb{R}$ | $1$ | $x$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $x^n$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{Z}^{*-}$ $x^n$ |
| $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ | $\cos x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $1 + \tan^2 x$ | $\tan x$ |
| $\mathbb{R}$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\cos(ax+b)$ |
| $\mathbb{R}$ | $a\cos(ax+b)$ | $\sin(ax+b)$ |