

ملخص لتحليلية الفضاء

1- الشرط التحليلي لاستقامة متجهتين

مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء

* تكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0$

* تكون \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} \neq 0$

الأعداد الحقيقية $d_1 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و $d_2 = \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix}$ و $d_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ تسمى المحددات المستخرجة

للمتجهتين \vec{u} و \vec{v}

ملاحظة

يمكن أن نحصل على المحددات المستخرجة بالتقنية التالية

$$\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = d_2 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = d_1 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = d_3 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

2- المتجهات المستوائية

أ- محددة ثلاث متجهات

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

و d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة من \vec{u} و \vec{v}

العدد $a''d_1 + b''d_2 + c''d_3$ يسمى محددة المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w}

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ أو } \det \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a''d_1 + b''d_2 + c''d_3 \quad \text{نكتب}$$

ملاحظة

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

ب- مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

تكون \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

تكون \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$

3- تمثيل بارامترى لمستقيم

أ- المعادلة المتجهة لمستقيم

$D(A; \vec{u})$ يرمز للمستقيم المار من A و الموجه بـ \vec{u}

مبرهنة

A نقطة من الفضاء و \vec{u} متجهة غير منعدمة، $D(A; \vec{u})$ هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث \overrightarrow{AM} و \vec{u} مستقيمتان

$$D(A; \vec{u}) = \left\{ M \in (E) / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \quad , t \in \mathbb{R} \right\}$$

ب- تمثيل بارامترى لمستقيم

تعريف

الفضاء منسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. لتكن $A(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ متجهة غير منعدمة

$$A(x_0; y_0; z_0) \text{ المار من } (D) \text{ المستقيم للبارامترى } \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

النظمة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$

4- تمثيل بارامترى لمستوى

أ- المعادلة المتجهة لمستوى

$P(A; \vec{u}; \vec{v})$ يرمز للمستوى المار من A و الموجه بالمتجهين \vec{u} و \vec{v}

مبرهنة

A نقطة من الفضاء \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين، $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث \overrightarrow{AM} و \vec{u} و \vec{v} مستوائية

$$P(A; \vec{u}; \vec{v}) = \left\{ M \in (E) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} \quad , (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

ب- تمثيل بارامترى لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. لتكن $A(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$

و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$ متجهتين غير منعدمتين

$$A(x_0; y_0; z_0) \text{ المار من } (P) \text{ المستوى للبارامترى } \begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \lambda t + \lambda' t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

النظمة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

5- معادلة ديكارتية للمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x' & \alpha & \alpha' \\ y - y' & \beta & \beta' \\ z - z' & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow (x - x') \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} - (y - y') \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} + (z - z') \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$$

نضع $a = d_1$; $b = d_2$; $c = d_3$; $d = -(d_1 x_0 + d_2 y_0 + d_3 z_0)$ حيث d_1 و d_2 و d_3

المحددات المستخرجة المرتبطتين بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

$$M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

ميرھنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ للمستوى (P) المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$ معادلة من شكل $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

ميرھنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ مستوى

6- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

مرھنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ إذا كان مستقيم (D) مارا من النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ و $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة موجهة له فان النظمة:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
 تسمى نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ أما إذا كان أحد المعاملات منعدما فان البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا.

7- الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

$(\Delta) = D(B; \vec{v})$ و $(D) = D(A; \vec{u})$
 - إذا كان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فان المستقيمين (D) و (Δ) متوازيان
 - إذا كان \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين فان المستقيمين (D) و (Δ) اما أن يكونا غير مستوائيين و اما أن يكونا متقاطعين

ب- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

$(Q) = P(B; \vec{u}'; \vec{v}')$ و $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$
 - يكون (P) و (P') متوازيين إذا و فقط إذا كان \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' و \vec{v}' مستوائية
 - يكون (P) و (P') متقاطعان إذا و فقط إذا كان \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' و \vec{v}' غير مستوائية

$(P): ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$
 $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ حيث $(a'; b'; c') \neq (0; 0; 0)$
 يكون (P) و (P') متوازيين قطعا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث
 $a' = ta$; $b' = tb$; $c' = tc$ و $d' \neq td$
 يكون (P) و (P') منطبقين إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث
 $a' = ta$; $b' = tb$; $c' = tc$ و $d' = td$

ج- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

ميرھنة

$(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$ و $(D) = D(B; \vec{u}')$
 - يكون (P) و (D) متوازيان إذا و فقط إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' مستوائية
 - يكون (P) و (D) متقاطعان إذا و فقط إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' غير مستوائية