الدوران

I- تعريف الدوران

1- مركب تماثلين متعامدين محورهما متقاطعان

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O من المستوى نضع $(D)=(OA)$ و $(D')=(OB)$

نعتبر α قياس الزاوية الهندسية $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}$

1 بين أن $[2\pi]$ $\quad 2\overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\equiv 2\alpha$ مهما يكن موضعي A و B على (D) و (D') على التوالي

2- استنتج أن $[2\pi]$ $\quad 2\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}\equiv 2\alpha$ حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D') على التوالي

3- لتكن M و M_1 و M' ثلاث نقط من المستوى حيث $S_{(D)}(M)=M_1$ و $S_{(D')}(M_1)=M'$

نعتبر $[2\pi]$ $\quad \overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}\equiv\dfrac{\beta}{2}$

بين أن
$$\begin{cases} OM=OM' \\ \overline{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}\equiv\beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

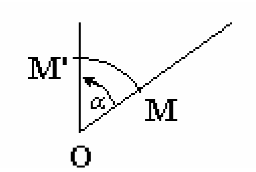
خلاصة

إذن $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ تطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' حيث
$$\begin{cases} OM=OM' \\ \overline{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}\equiv\beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

2- تعريف

لتكن O نقطة من المستوى الموجه P و α عددا حقيقيا
الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' بحيث:

- $M'=O$ إذا كانت $M=O$
- $\begin{cases} OM=OM' \\ \overline{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ إذا كان $M\neq O$



*- نرمز للدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز $r(O;\alpha)$ أو بالرمز r

*- النقطة M' تسمى صورة M بالدوران r نكتب $r(M)=M'$

مثال

التماثل المركزي S_O دوران مركزه O و زاويته π

التطبيق المتطابق I_P دوران زاويته منعدمة و مركزه أية نقطة من المستوى

ملاحظات

* كل دوران مخالف للتطبيق المتطابق له نقطة وحيدة صامدة هي مركزه

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

- إذا كان $[2\pi]$ $\alpha\equiv 0$ فان $r(M)=M$

في هذه الحالة r هو التطبيق المتطابق في المستوى جميع نقط المستوى صامدة

- إذا كان $[2\pi]$ $\alpha\not\equiv 0$ فان النقطة الوحيدة الصامدة بالدوران r هي مركزه O

* ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D')

$S_{(D')}\circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته β حيث $[2\pi]$ $\quad \overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}\equiv\dfrac{\beta}{2}$

3- الدوران العكسي

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM \\ \left(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}\right)\equiv -\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow r'(M')=M \;/\quad r'=r(O;-\alpha)$$

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بالرمز r^{-1}

$$\begin{cases} r(M)=M' \\ r(O)=O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^{-1}(M')=M \\ r^{-1}(O)=O \end{cases}$$

الدوران r تطبيق تقابلي في المستوى

خاصة

كل دوران $r(O;\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى
الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدورا ن العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بـ: r^{-1}

تمارين تطبيقية

1- ليكن $ABCD$ مربعا

حدد زاويتي الدوارنيين r_1 و r_2 الذي مركزاهما A و C على التوالي ويحولان معا النقطة D إلى B

2- ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

أ- حدد مركز الدوران r الذي يحول B إلى C

ب- حدد الدوران العكسي للدوران r

4- دوران ومركب تماثلين متعامدين محورهما متقاطعان

* رأينا $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته β حيث (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D') و $[2\pi]$ $\overline{(\vec{u};\vec{v})}\equiv \frac{\beta}{2}$

* عكسيا نعتبر الدوران $r=r(O;\alpha)$

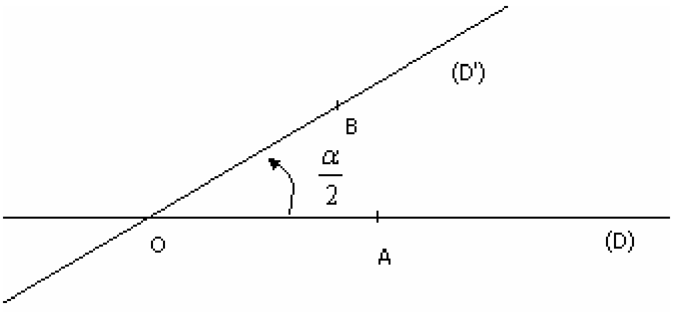
نختار مستقيما (D) يمر من O لتكن A نقطة من (D) تخالف O و B صورة A بدوران زاويته $\frac{\alpha}{2}$

لدينا إذن $\overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\equiv \frac{\alpha}{2} \quad [2\pi]$

نعتبر $(D')=(OB)$

ومنه $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته α

اذن $S_{(D')}\circ S_{(D)}=r(O;\alpha)$



مبرهنة

* ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D')
$S_{(D')}\circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته $2\overline{(\vec{u};\vec{v})}$
* كل دوران هو مركب تماثلين متعامدين محوراهما متقاطعان في مركز الدوران

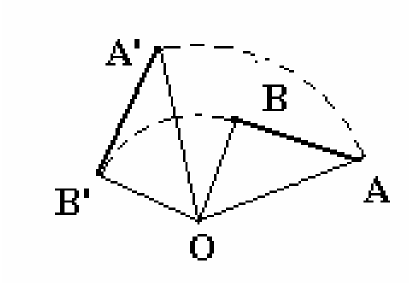
تمرين

نعتبر $ABCD$ مربعا بحيث $[2\pi]$ $\qquad (\overline{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{2}$

حدد $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ و $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

II- خاصيات الدوران

1- خاصية أساسية (الحفاظ على المسافة)



ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا و A وB نقطتين

$r(A) = A' \quad ; \quad r(B) = B'$

لنقارن $AB = A'B'$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين OAB و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$$

$$AB'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB'.\cos\left[\widehat{A'OB'}\right]$$

و بما أن $r(A) = A' \quad ; \quad r(B) = B'$ فان:
$\begin{cases} OA = OA' \\ (\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} OB = OB' \\ (\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}}) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

و لدينا من جهة أخرى

$$(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) + (\overline{\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}}) + (\overline{\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OB}}) \quad [2\pi]$$

$$(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv \alpha + (\overline{\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}}) - \alpha \quad [2\pi]$$

$$(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}}) \quad [2\pi]$$

ومنه $\left[\widehat{AOB}\right] = \left[\widehat{A'OB'}\right]$

و بالتالي $A'B'^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $A'B'^2 = AB^2$ اذن $A'B' = AB$

خاصية

> ليكن r دورانا و و A وB نقطتين
> إذا كان $r(A) = A' \quad ; \quad r(B) = B'$ فان $A'B' = AB$
> نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين

ليكن ABC مثلثا . نعتبر M و N نقطتين خارج المستوى بحيث MAB و NAC مثلثان متساويا الأضلاع
قارن MC و NB

2- الدوران و استقامية النقط

أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r

لتكن M نقطة من $[AB]$ و M' صرتها بالدوران r

1- بين أن $M' \in [A'B']$

2- بين اذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $0 \le \lambda \le 1$ λ فان $\qquad \overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

خاصية

> لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r
> صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$

إذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le 1$ λ فان $\overrightarrow{AM'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ب- صرة مستقيم

لتكن A' وB' صورتي النقطتين المختلفتين A و B بدوران r

أ- بين أن $r([AB))=[A'B')$

ب- بين أن $r((AB))=(A'B')$

خاصية

لتكن A' وB' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بدوران r

* صورة نصف المستقيم $[AB)$ هو نصف المستقيم $[A'B')$

* صورة المستقيم (AB) هو المستقيم $(A'B')$

* إذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ λ فان $\overrightarrow{AM'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ج- المرجح و الدوران

A' وB' و G' صور النقط A و B و G بدوران r على التوالي و G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

بين أن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

نتيجة التمرين(صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين)

خاصة

الدوران يحافظ على مرجح نقطتين

نتيجة

A' وB' و I' صورالنقط A و B و I بدوران r على التوالي

إذا كان I منتصف $[AB]$ فان I' منتصف $[A'B']$

الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامية

خاصية

لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$

إذا كان $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا

ننشئ خارجه المثلث CBF المتساوي الأضلاع و داخله المثلث ABE

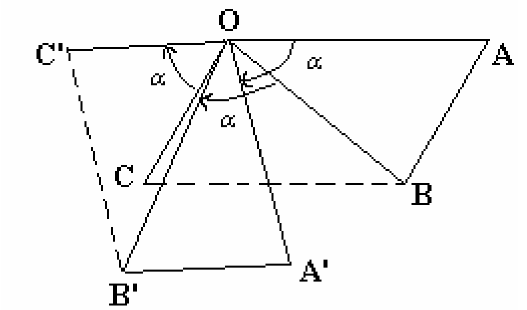
بين أن النقط D و E و F مستقيمية (يمكن اعتبار الدورن $r=r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)$

3- الدوران و الزوايا

أ) خاصة أساسية

لتكن A' وB' صورتي A و B بدوران r زاويته α على التوالي . لتكن C نقطة حيث $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{A'B'}$



و بالتالي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\quad[2\pi]$

وحيث أن $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ فان $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

خاصية

ليكن r دورانا زاويته α إذا كان A' و B' صورتي A و B بالدوران r فان $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha$

ب- نتيجة

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)+\left(\overrightarrow{C'D'};\overrightarrow{CD}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\alpha+\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

إذن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\quad[2\pi]$

نتيجة

لتكن A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r حيث $A\neq B$ و $C\neq D$ $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قيا س الزوايا

نتيجة

الدوران يحافظ على التعامد و على التوازي

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A و (C) دائرة محيطة به . نعتبر M نقطة من القوس $\left[\overset{\frown}{AB}\right]$ الذي لا يحتوي على C . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

بين أن M و M' و C نقط مستقيمية حيث $r(M)=M'$

4- صورة دائرة بدوران

خاصية

صورة دائرة $C(\Omega;R)$ بدوران r هي دائرة $C(\Omega';R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا و (C) دائرة مارة من A و C

لتكن Q و R نقطتا تقاطع (C) مع (BC) و (CD) على التوالي

بين أن $BQ=DR$ (يمكن اعتبار الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$)

III- مركب دورانين

1 – مركب دورانين لهما نفس المركز

خاصية

$r(O;\alpha)\circ r(O;\beta)=r(O;\alpha+\beta)$ بين ذلك

2 - مركب دورانين ليس لهما نفس المركز

أ- مركب تماثلين متعامدين محوراهما متوازيان

خاصة

- مركب تماثلين محوراهما متوازيان هو إزاحة   - كل إزاحة هو مركب تماثلين محوراهما متوازيان   بين ذلك

ب- مركب دورانين ليس لهما نفس المركز

خاصية

ليكن $r_1(O_1;\alpha)$ و $r_2(O_2;\beta)$ دورانين زاويتاهما غير منعدمتين و $O_1 \neq O_2$

إذا كان $\alpha+\beta \neq 2k\pi$ $(k\in)$ فان $r_1 \circ r_2$ دورانا زاويته $\alpha+\beta$

إذا كان $\alpha+\beta = 2k\pi$ $(k\in)$ فان $r_1 \circ r_2$ إزاحة

بين ذلك

VI- الصيغة التحليلية لدوران

خاصية

يكون التطبيق r من (P) نحو (P) دورانا مركزه $\Omega(a;b)$ و زاويته α اذا و فقط اذا كانت صيغته التحليلية في معلم متعامد ممنظم مباشر على الشكل:

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

بين ذلك